Le processus de rafle de J. J. Moreau (Moreau's sweeping process)

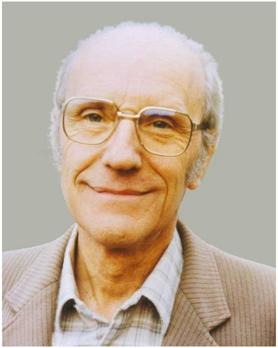
P. Raynaud de Fitte

LMRS, Université de Rouen Normandie

Doctoriales Nationales de Mathématiques
ENS Constantine
octobre 2017

Plan

Introduction : J.J. Moreau et A.V. Skorokhod

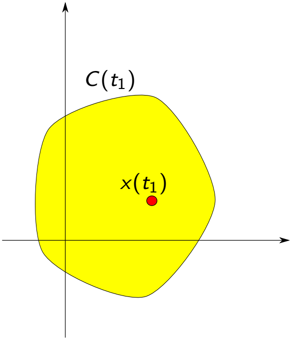


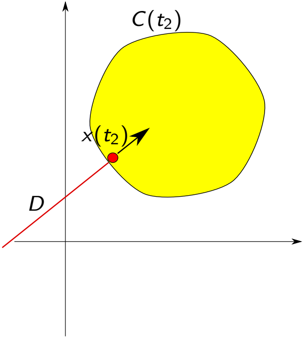
J.J. Moreau
1923 – 2014
Processus de rafle

A.V. Skorokhod
1930 – 2011
Problème de réflexion

Processus de rafle (sweeping process)

$$x'(t) \in -N_{C(t)}(x(t))$$

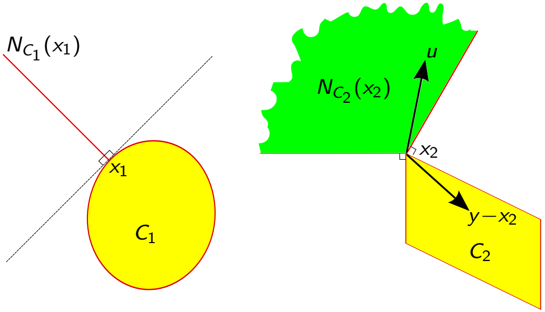




$N_{C(t_1)}(x(t_1)) = \{0\}$ $\qquad$ $N_{C(t_2)}(x(t_2)) = D$

Cône normal

$$N_C(x) := \{u \in \mathbb{H};\ (\forall y \in C)\ \langle u, y - x\rangle \leq 0\} \quad (x \in C)$$



Quel sens donner à x' ?

$$x'(t) \in -N_{C(t)}(x(t))$$

- Si x est absolument continu, x' est défini Lebesgue p.p. au sens classique et intégrable, avec

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(t)\, dt,$$

c-à-d que x a une densité, x', par rapport à la mesure de Lebesgue.
Déf : x est absolument continu si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute suite finie d'intervalles disjoints $]a_n, b_n[$,

$$\sum_n (b_n - a_n) < \eta \Rightarrow \sum_n \|x(b_n) - x(a_n)\| < \epsilon.$$

Quel sens donner à x' ?

$$x'(t) \in -N_{C(t)}(x(t))$$

- Pour x continu p.p. dérivable, l'intégrale de la dérivée classique par rapport à la mesure de Lebesgue ne suffit pas à expliquer le déplacement de x : on a seulement

$$\|x(t) - x(0)\| \geq \left\| \int_0^t x'(t)\, dt \right\|.$$

Escalier de Cantor :

$$x(0) = 0,\ x(1) = 1,\ x'(t) = 0 \text{ Lebesgue-p.p.}$$

Quel sens donner à x' ?

- On dit que x est à *variation bornée* sur $[0, T]$ si

$$\sup_{\pi\in\Pi(0,T),\,\pi=(t_0,\ldots,t_n)} \sum_{i=0}^{n-1} \|x(t_{i+1}) - x(t_i)\| < +\infty.$$

où $\Pi(0, T)$ est l'ensemble des subdivisions de $[0, T]$.

Dans ce cas, il existe une mesure sur $[0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{H}$, notée dx ou Dx, telle que, pour tous $s, t \in [0, T]$ t.q. $s \leq t$,

$$x(t) = x(s) + \int_{]s,t]} dx.$$

dx est la *mesure différentielle* (à valeurs dans $\mathbb{H}$) ou *mesure de Stieltjes* associée à x.

x à variation bornée $\Leftrightarrow$ l'intégrale de Stieltjes de toute fonction continue $f : [0, T] \to L(\mathbb{H}, \mathbb{K})$ par rapport à x existe :

$$\int_0^t f\, dx = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i)(x(t_{i+1}) - x(t_i)).$$

Le processus de rafle, plus précisément :

- $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert,
- $t \mapsto C(t)$ est une multiapplication définie sur $[0, T]$, à valeurs dans les convexes fermés de $\mathbb{H}$,
- μ est une mesure positive sur $[0, T]$,
- $x : [0, T] \to \mathbb{H}$ continu à variation bornée tel que la mesure vectorielle Dx associée à x par l'intégrale de Stieltjes a une densité x' par rapport à μ vérifiant

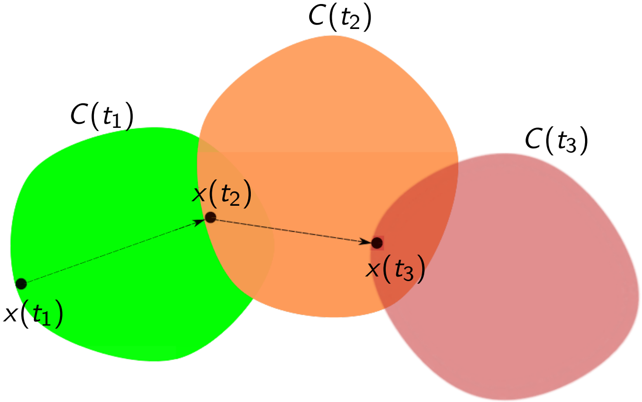
$$\begin{cases} -x'(t) \in N_{C(t)}(x(t)), \ \mu\text{-p.p.} \\ x(0) = a. \end{cases}$$

Exemples :

- μ est la mesure de Lebesgue, alors x' est la dérivée de x,
- $\mu = |Dx|$ est la mesure associée à la variation de x.

Algorithme de rattrapage ("catching up") de J.J. Moreau

$$x(t_{i+1}) = \mathrm{proj}_{C(t_{i+1})}(x(t_i))$$



Le cas où C est d'intérieur non vide

Theorème (M. Monteiro Marques, M. Valadier 1984-1986) On suppose que C est continu pour la distance de Hausdorff et qu'il existe $x_0 \in \mathbb{H}$ et $r_0 > 0$ tels que

$$\overline{B}_{\mathbb{H}}(x_0, r_0) \subset C(t), \ \forall t \in [0, T].$$

Alors le processus de rafle admet une unique solution x continue à variation bornée, relativement à la mesure $|Dx|$:

$$\begin{cases} -x'(t) \in N_{C(t)}(x(t)), \ |Dx|\text{-p.p.} \\ \ x(0) = a, \end{cases}$$

et on a

$$||Dx|| := \int_0^T |Dx| \leq \frac{\left(||a - x_0||^2 - ||r_0|^2|\right)_+}{2r_0}.$$

Rafle perturbée

Problème déterministe :

$$\begin{cases} x'(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + b(t, x(t)) \\ x(0) = a \end{cases}$$

Problème stochastique :

$$\begin{cases} dX(t) \in \Big(-N_{C(t)}(X(t)) + b(t, X(t)) \Big)\, dt + \sigma(t, X(t))\, dW(t) \\ X(0) = a \end{cases}$$

Problème avec perturbation à p-variation bornée :

$$\begin{cases} dX(t) \in \Big(-N_{C(t)}(X(t)) + b(t, X(t)) \Big)\, dt + \sigma(t, X(t))\, dZ(t) \\ X(0) = a \end{cases}$$

Problème de réflexion de Skorokhod avec frontière mobile

Trouver (X, K) processus adapté continu à valeurs dans $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ tel que

- $X(0) = K(0) = a$,
- K à variation bornée,
- $X(t) \in C(t)$
- K ne varie que lorsque $X(t)$ est sur le bord de $C(t)$:

$$-\frac{dDK}{d|DK|}(t) \in N_{C(t)}(X(t)),\ |DK|\text{-p.p.}$$

- $X(t) = \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \sigma(s, X(s))\,dW(s) + K(t)$.

Un exemple de résultat

Theorème On suppose que

- $\mathbb{H}$ est de dimension finie,
- C est un processus adapté, continu, à valeurs convexes fermées d'intérieur non vide de $\mathbb{H}$,
- a est $\mathcal{F}_0$-mesurable,
- $\mathrm{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\inf_{x\in C(t)}\|x\|^4\right) < +\infty$ et $\mathrm{E}\left(\|a\|^4\right) < +\infty$,
- $\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq \mathfrak{c}\|x - y\|$,
- $\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq \mathfrak{c}(1 + \|x\|^{1/2})$.

Alors le processus de rafle avec perturbation stochastique (problème de Skorokhod stochastique avec frontière mobile) a une solution unique.

Idée 1 : on sait résoudre le problème de Skorokhod quand la perturbation est connue

Soit $Y : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{H}$ un processus continu, $Y(0) = 0$.
Soit K à trajectoires dans $BVC([0, T]; \mathbb{H})$ tel que

$$-\frac{dDK}{d|DK|}(t) \in N_{(C(t)-Y(t))}(K(t)), |DK|\text{-p.p.}$$

En posant $X(t) = Y(t) + K(t)$, on a

$$X(t) \in C(t),$$
$$N_{(C(t)-Y(t))}(K(t)) = N_{C(t)}(X(t)).$$

Donc :

$$\begin{cases} X(t) = Y(t) + K(t), \\ X(0) = K(0) = a, \\ X(t) \in C(t), \forall t \in [0, T], \\ -\dfrac{dDK}{d|DK|}(t) \in N_{C(t)}(X(t)), |DK|\text{-p.p.}, \end{cases}$$

L'application de Skorokhod

associe à une fonction continue $Y : [0, T] \to \mathbb{H}$ une fonction continue $(X, K) : [0, T] \to \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ telle que

- $X(0) = K(0) = a$,
- K à variation bornée,
- $X(t) \in C(t)$,
- K ne varie que lorsque $X(t)$ est sur le bord de $C(t)$:

$$-\frac{dDK}{d|DK|}(t) \in N_{C(t)}(X(t)), \; |DK|\text{-p.p.}$$

- $X(t) = Y(t) + K(t)$.

Problème : comment faire si Y dépend de X,

$$Y(t) = \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \sigma(s, X(s))\, dW(s)\,?$$

Idée 2 : schéma d'approximations et théorème de point fixe

- Exemple : schéma de Tonelli. On pose

$$Y_n(t) = \int_0^{(t-1/n)_+} b(s, X_n(s))\, ds + \sigma(s, X_n(s))\, dW(s).$$

  Dès que X_n est connu sur un intervalle $[0, t] \subset [0, T]$, on connaît Y_n sur $[0, t + 1/n]$, donc X_n et K_n sont définis sur $[0, t + 1/n]$ par l'application de Skorokhod, et on peut recommencer sur $[t + 1/n, t + 2/n]$.
  Ainsi X_n, K_n et Y_n sont bien définis et continus sur $[0, T]$.
- On conclut à l'aide du théorème du point fixe pour les applications contractantes.

Unicité (cas déterministe continu à variation bornée)

Monotonie de l'opérateur cône normal :

$$\int_0^t \langle X(s) - X^*(s), d(K - K^*)(s) \rangle \leq 0.$$

Opérateurs maximaux monotones Soit $A : \mathbb{H} \to 2^{\mathbb{H}}$. Le *graphe* de A est

$$\mathcal{G}(A) = \{(x, y);\ y \in A(x)\}.$$

A est *maximal monotone* si

$$(x, u) \in \mathcal{G}(A) \Leftrightarrow \left(\Big(\forall (y, v) \in \mathcal{G}(A)\Big)\ \langle x - y, u - v \rangle \geq 0 \right).$$

Exemple : $A(x) = \partial\varphi(x)$, φ convexe propre.
En particulier : $A(x) = N_C(x)$.

Unicité (cas déterministe continu à variation bornée)

Monotonie de l'opérateur cône normal :

$$\int_0^t \langle X(s) - X^*(s), d(K - K^*)(s)\rangle \leq 0.$$

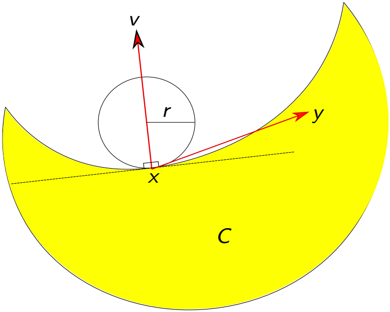
Posons $\overline{X} = X - X^*$, $\overline{Y} = Y - Y^*$, $\overline{K} = K - K^*$. On a

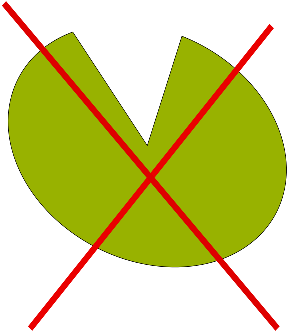
$$\begin{aligned}
\left\|\overline{X}(t)\right\|^2 &= 2\int_0^t \left\langle \overline{X}(s), d\overline{X}(s)\right\rangle = 2\int_0^t \left\langle \overline{X}(s), d\overline{Y}(s) + d\overline{K}(s)\right\rangle \\
&\leq 2\int_0^t \left\langle \overline{X}(s), d\overline{Y}(s)\right\rangle \\
&= 2\int_0^t \left\langle \overline{X}(s), (b(s, X(s)) - b(s, X^*(s))\, ds\right\rangle \\
&\leq 2c\int_0^t \left\|\overline{X}(s)\right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Lemme de Grönwall : $\overline{X} = 0$.

Ensembles prox-réguliers

C est uniformément prox-régulier de constante r si tout point à distance de C inférieure à r a une unique projection sur C.





$$(\forall y \in C) \quad \langle v, y - x\rangle \leq \frac{1}{2r}\|v\|\|y-x\|^2$$

Rafle perturbée avec ensemble prox-régulier

Theorème (Adly-Nacry-Thibault 2017) On suppose que

- C est à valeurs uniformément prox-régulières de constante r,
- il existe une mesure borélienne μ sur $[0, T]$ telle que $\mu(\{s\}) < r/2$ pour tout $s \in [0, T]$ et

$$\sup_{y \in \mathbb{H}} |d(y, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \mu(]s, t])$$

pour tous $t, s \in [0, T]$ tels que $s < t$,
- f est mesurable, $\|f(t, x)\| \leq \beta(t)(1 + \|x\|)$ $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \alpha(t) \|x - y\| \ \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{H}$, avec $\alpha, \beta \in L^1$,

Alors le processus de rafle

$$\begin{cases} -x'(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + f(t, x(t)), \ |Dx|\text{-p.p.} \\ x(0) = a, \end{cases}$$

a une solution unique dont les sauts vérifient $\|u(t) - u(t^-)\| < \mu(\{t\}) \ \forall t \in [0, T]$.

Dynamique des mouvements de foule (Maury-Venel 2007)

Modèle microscopique :

- Individus = disques de centres $q_1, \ldots, q_N$ et de rayon r.
- Configuration : $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N}$. Condition de non recouvrement :

$$D_{i,j}(\mathbf{q}) := \|q_i - q_j\| - 2r \geq 0, \quad (i \neq j).$$

- Ensemble admissible : $K = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N};\ D_{i,j}(\mathbf{q}) \geq 0,\ \forall i \neq j\}$.
  On peut ajouter les contraintes des murs et autres obstacles, et même des contraintes variables dans le temps (porte qui s'ouvre ou se ferme, véhicule en mouvement, etc).
  Proposition K est uniformément prox-régulier de constante

$$\rho \sim \frac{r\sqrt{2}}{2^{3N}} \frac{1}{12^{3N^2}}.$$

  (K est convexe dans le cas d'un couloir).

- $e_{i,j}(\mathbf{q}) = \dfrac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|}$

$$G_{i,j}(\mathbf{q}) = \nabla D_{i,j}(\mathbf{q}) = (0, \dots, 0, -e_{i,j}(\mathbf{q}), 0, \dots, 0, e_{i,j}(\mathbf{q}), 0, \dots, 0).$$

- Ensemble de vitesses admissibles

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{v \in \mathbb{R}^{2N};\ D_{i,j}(\mathbf{q}) = 0) \Rightarrow \langle G_{i,j}(\mathbf{q}), v\rangle \geq 0,\ \forall i < j\}.$$

- Vitesse souhaitée $\mathbf{U}(\mathbf{q}) = (U_1(\mathbf{q}), \dots, U_N(\mathbf{q}))$, par exemple, si $D(.)$ est la distance géodésique à la sortie du batiment, $U_i(\mathbf{q}) = -\nabla D(q_i)$.
- Vitesse réelle $\mathbf{q}' =$ meilleure approximation quadratique de la vitesse souhaitée dans l'ensemble des vitesses admissibles :

$$\mathbf{q}' = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(\mathbf{q})}(\mathbf{U}(\mathbf{q})).$$

En posant $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \{u \in \mathbb{R}^{2N};\ \langle u, v \rangle \leq 0\}$, il vient

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{C}(\mathbf{q})} + \mathrm{proj}_{\mathcal{N}(\mathbf{q})} = \mathsf{Id}$$

donc

$$\mathbf{q}' + \mathrm{proj}_{\mathcal{N}(\mathbf{q})}(\mathbf{U}(\mathbf{q})) = \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

Comme $\mathrm{proj}_{\mathcal{N}(\mathbf{q})}(\mathbf{U}(\mathbf{q})) \in \mathcal{N}(\mathbf{q})$, on déduit

$$\mathbf{q}' + N_K(\mathbf{q}) \ni \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

D'autre part $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = N_K(\mathbf{q})$ est le cône normal proximal à K au point $\mathbf{q}$. D'où

$$\mathbf{q}' \in -N_K(\mathbf{q}) + \mathbf{U}(\mathbf{q}).$$

Solution unique pour une condition initiale donnée, résolution par une variante de l'algorithme de rattrapage.

Applications du processus de rafle

Rafle déterministe

- élastoplasticité (J.J. Moreau)
- dynamique (J.J. Moreau)
- électricité
- mouvements de foule

Problème de Skorokhod stochastique

- files d'attente
- finance mathématique
- physique statistique
- mouvements de foule


Merci