Les courants de de Rham et le complexe de Morse

François LAUDENBACH

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes

Doctoriales Nationales de Mathématiques, 28 – 31 octobre 2017, Constantine

Plan

Ligne générale : Analyse et Topologie

A) Formes différentielles et courants

B) Fonctions de Morse, gradients génériques (dits Morse-Smale), complexes de Morse associés.

Théorème (de Rham, 1931)

Soit M une variété différentiable compacte à bord vide. La cohomologie du complexe $\Omega^*(M)$ des formes différentielles sur M est de dimension finie,

Plan

Ligne générale : ANALYSE ET TOPOLOGIE

A) Formes différentielles et courants

B) Fonctions de Morse, gradients génériques (dits Morse-Smale), complexes de Morse associés.

Théorème (de Rham, 1931)

Soit M une variété différentiable compacte à bord vide. La cohomologie du complexe $\Omega^*(M)$ des formes différentielles sur M est de dimension finie, égale au rang de la cohomologie combinatoire introduite par H. Poincaré ($=$ nombre de Betti).

Plan

Ligne générale : ANALYSE ET TOPOLOGIE

A) Formes différentielles et courants

B) Fonctions de Morse, gradients génériques (dits Morse-Smale), complexes de Morse associés.

Théorème (de Rham, 1931)

Soit M une variété différentiable compacte à bord vide. La cohomologie du complexe $\Omega^*(M)$ des formes différentielles sur M est de dimension finie, égale au rang de la cohomologie combinatoire introduite par H. Poincaré (= nombre de Betti).

• La dimension de la cohomologie de de Rham est un invariant topologique.

Georges de Rham (1903– 1990)

Photos extraites de : The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008) - History of ICMI.

• Théorie de Hodge, *The Theory and Applications of Harmonic Integrals,* Cambridge University Press, 1941.

• L. Schwartz, *Théorie des distributions*, éd. Hermann, Paris, 1951.

• Nouvelle preuve du théorème de G. de Rham dans son livre : *Variétés différentiables : formes, courants, formes harmoniques,* éd. Hermann, Paris, 1955.

I) Formes différentielles sur une variété M^n de dimension n

L'ensemble des formes différentielles sur M a une structure d'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(M), d, \wedge)$, où $*$ est le degré et la différentielle $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ prolonge la différentielle des fonctions réelles de classe C^∞ et où $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$ est le produit extérieur.

L'ensemble des formes différentielles sur M a une structure d'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(M), d, \wedge)$, où $*$ est le degré et la différentielle $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ prolonge la différentielle des fonctions réelles de classe C^∞ et où $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$ est le produit extérieur.

– $\Omega^0(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$,

– La différentielle d vérifie :
(1) $d \circ d = 0$,
(2) la formule de Leibniz : $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$.

L'ensemble des formes différentielles sur M a une structure d'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(M), d, \wedge)$, où $*$ est le degré et la différentielle $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ prolonge la différentielle des fonctions réelles de classe C^∞ et où $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$ est le produit extérieur.

– $\Omega^0(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$,

– La différentielle d vérifie :
(1) $d \circ d = 0$,
(2) la formule de Leibniz : $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$.

– le produit extérieur $\wedge$ est bilinéaire et commutatif au sens gradué :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \wedge \alpha.$$

L'ensemble des formes différentielles sur M a une structure d'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(M), d, \wedge)$, où $*$ est le degré et la différentielle $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ prolonge la différentielle des fonctions réelles de classe C^∞ et où $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$ est le produit extérieur.

– $\Omega^0(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$,

– La différentielle d vérifie :
(1) $d \circ d = 0$,
(2) la formule de Leibniz : $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge d\beta$.

– le produit extérieur $\wedge$ est bilinéaire et commutatif au sens gradué :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} \beta \wedge \alpha.$$

Aujourd'hui, on parle du *complexe* de de Rham,

$$\Omega^*(M) = \left(\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M)\right).$$

Son k-ème groupe de cohomologie est

$$H^k_{dR}(M) := \left(\ker d_{|\Omega^k(M)}\right) / \left(\mathrm{im}\, d_{|\Omega^{k-1}(M)}\right).$$

– Une forme de degré 1 s'écrit

$$\alpha(\underline{x}) = a_1(\underline{x})\, dx_1 + \cdots + a_n(\underline{x})\, dx_n$$

où $a_i(\underline{x})$ est une fonction C^∞ sur U et où $(dx_1, \ldots, dx_n)$ est la base canonique du dual $(\mathbb{R}^n)^*$.

– Une forme de degré 1 s'écrit

$$\alpha(\underline{x}) = a_1(\underline{x})\, dx_1 + \cdots + a_n(\underline{x})\, dx_n$$

où $a_i(\underline{x})$ est une fonction C^∞ sur U et où $(dx_1, \ldots, dx_n)$ est la base canonique du dual $(\mathbb{R}^n)^*$.

– En degré n,

$$\omega(\underline{x}) = w(\underline{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ est la *forme volume canonique* ($=$ déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

En coordonnées locales $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ sur un ouvert $U \subset M$

– Une forme de degré 1 s'écrit

$$\alpha(\underline{x}) = a_1(\underline{x})\, dx_1 + \cdots + a_n(\underline{x})\, dx_n$$

où $a_i(\underline{x})$ est une fonction C^∞ sur U et où $(dx_1, \ldots, dx_n)$ est la base canonique du dual $(\mathbb{R}^n)^*$.

– En degré n,

$$\omega(\underline{x}) = w(\underline{x})\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

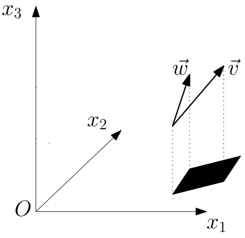
où $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ est la *forme volume canonique* ($=$ déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

– Sur M^n et pour $k > n$, l'espace $\Omega^k(M)$ est nul.

– Une forme de degré 2 s'écrit

$$\beta(\underline{x}) = \sum_{i<j} b_{ij}(\underline{x})\, dx_i \wedge dx_j$$

où $b_{ij}(\underline{x})$ est une fonction C^∞ sur U et où $dx_i \wedge dx_j$ est la forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$ qui, à un couple de vecteurs $(\vec{v}, \vec{w})$, associe l'aire algébrique du parallélogramme orienté basé sur la paire des vecteurs projetés $(p_{ij}(\vec{v}), p_{ij}(\vec{w}))$; ici p_{ij} est la projection de $\mathbb{R}^n$ sur le plan orienté $O_{x_i x_j}$ parallèlement aux autres axes de coordonnées.



$n = 3,\ i = 1,\ j = 2$

INDUCTION. Soit $G : N^p \to M^n$ une application C^∞ dont la source est une variété de dimension p. Cette application induit un morphisme d'algèbre différentielle graduée

$$G^* : \Omega^*(M^n) \to \Omega^*(N^p)$$

c.-à-d. : $G^* : \Omega^k(M^n) \to \Omega^k(N^p)$ pour $k = 0, ..., n$, (nul si $k > p$) ;

INDUCTION. Soit $G : N^p \to M^n$ une application C^∞ dont la source est une variété de dimension p. Cette application induit un morphisme d'algèbre différentielle graduée

$$G^* : \Omega^*(M^n) \to \Omega^*(N^p)$$

c.-à-d. : $G^* : \Omega^k(M^n) \to \Omega^k(N^p)$ pour $k = 0, ..., n$, (nul si $k > p$) ;

$$(3)\ G^*(\alpha \wedge \beta) = (G^*\alpha) \wedge (G^*\beta)$$

INDUCTION. Soit $G : N^p \to M^n$ une application C^∞ dont la source est une variété de dimension p. Cette application induit un morphisme d'algèbre différentielle graduée

$$G^* : \Omega^*(M^n) \to \Omega^*(N^p)$$

c.-à-d. : $G^* : \Omega^k(M^n) \to \Omega^k(N^p)$ pour $k = 0, ..., n$, (nul si $k > p$) ;

$$(3)\ G^*(\alpha \wedge \beta) = (G^*\alpha) \wedge (G^*\beta)$$

$$(4)\ G^*(d\alpha) = d(G^*\alpha).$$

INDUCTION. Soit $G : N^p \to M^n$ une application C^∞ dont la source est une variété de dimension p. Cette application induit un morphisme d'algèbre différentielle graduée

$$G^* : \Omega^*(M^n) \to \Omega^*(N^p)$$

c.-à-d. : $G^* : \Omega^k(M^n) \to \Omega^k(N^p)$ pour $k = 0, ..., n$, (nul si $k > p$) ;

$$(3)\ G^*(\alpha \wedge \beta) = (G^*\alpha) \wedge (G^*\beta)$$

$$(4)\ G^*(d\alpha) = d(G^*\alpha).$$

Pour $k = 0$ et $f \in \Omega^0(M)$, G^*f est la fonction composée $f \circ G$.
Par (4), on a $G^*(df) = d(f \circ G)$. Par (3) et (4), le morphisme G^* induit par G est alors entièrement déterminé.

INDUCTION. Soit $G : N^p \to M^n$ une application C^∞ dont la source est une variété de dimension p. Cette application induit un morphisme d'algèbre différentielle graduée

$$G^* : \Omega^*(M^n) \to \Omega^*(N^p)$$

c.-à-d. : $G^* : \Omega^k(M^n) \to \Omega^k(N^p)$ pour $k = 0, ..., n$, (nul si $k > p$) ;

$$(3)\ G^*(\alpha \wedge \beta) = (G^*\alpha) \wedge (G^*\beta)$$

$$(4)\ G^*(d\alpha) = d(G^*\alpha).$$

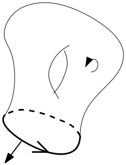
Pour $k = 0$ et $f \in \Omega^0(M)$, G^*f est la fonction composée $f \circ G$.
Par (4), on a $G^*(df) = d(f \circ G)$. Par (3) et (4), le morphisme G^* induit par G est alors entièrement déterminé.

INTÉGRATION. Si N^p est orientée et $\alpha \in \Omega^p(M)$, alors $G^*(\alpha)$ est une forme volume (algébrique) sur N^p. En coordonnées locales, $G^*\alpha = w(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$. Cette forme définit une mesure sur N^p et, si N^p est compacte, l'intégrale $\int_{N^p} G^*(\alpha)$ converge.

Soit N^p une variété orientée et compacte. Si N^p a un bord ∂N^p, que l'on oriente comme bord de N^p, alors pour $\lambda \in \Omega^{p-1}(N^p)$ on a :

$$\int_{\partial N^p} \lambda = \int_{N^p} d\lambda.$$

Si ∂N^p est vide, alors $\int_{N^p} d\lambda = 0$.



Bord orienté d'une surface orientée $(p = 2)$

On munit $\Omega^k(M)$ de la topologie C^∞ (espace de Fréchet). L'espace vectoriel $C_k(M)$ des courants de dimension k sur M est le dual topologique de $\Omega^k(M)$.

On munit $\Omega^k(M)$ de la topologie C^∞ (espace de Fréchet). L'espace vectoriel $C_k(M)$ des courants de dimension k sur M est le dual topologique de $\Omega^k(M)$.
En transposant $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, on obtient l'opérateur bord $\partial : C_{k+1}(M) \to C_k(M)$ et on a

$$\partial \circ \partial = 0.$$

On munit $\Omega^k(M)$ de la topologie C^∞ (espace de Fréchet). L'espace vectoriel $C_k(M)$ des courants de dimension k sur M est le dual topologique de $\Omega^k(M)$.
En transposant $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, on obtient l'opérateur bord $\partial : C_{k+1}(M) \to C_k(M)$ et on a

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Donc les courants forment un complexe (homologique).

$$C_*(M) = \left(C_0(M) \xleftarrow{\partial} C_1(M) \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n(M) \right).$$

Son k-ème groupe d'homologie $H_k(M) := \ker \partial_{|C_k(M)} / \mathrm{im}\, \partial_{|C_{k+1}(M)}$

Exemples.

1) Si $N^k \subset M^n$ est une sous-variété orientée et compacte de M de dimension k, alors on définit un courant $c_{N^k} \in C_k(M^n)$ par la formule : $< c_{N^k}, \varphi >= \int_{N^k} \varphi$ pour tout $\varphi \in \Omega^k(M^n)$.

1) Si $N^k \subset M^n$ est une sous-variété orientée et compacte de M de dimension k, alors on définit un courant $c_{N^k} \in C_k(M^n)$ par la formule :
$< c_{N^k}, \varphi >= \int_{N^k} \varphi$ pour tout $\varphi \in \Omega^k(M^n)$.
D'après la formule de Stokes, son bord courant est $c_{\partial N^k}$.

Exemples.

1) Si $N^k \subset M^n$ est une sous-variété orientée et compacte de M de dimension k, alors on définit un courant $c_{N^k} \in C_k(M^n)$ par la formule : $< c_{N^k}, \varphi >= \int_{N^k} \varphi$ pour tout $\varphi \in \Omega^k(M^n)$.
D'après la formule de Stokes, son bord courant est $c_{\partial N^k}$.

2) Courants réguliers. On suppose que M^n est orientée et compacte à bord vide. Une forme $\alpha \in \Omega^{n-k}(M^n)$ définit un courant de dimension k, noté $c_\alpha \in C_k(M^n)$, par la formule :

$$< c_\alpha, \varphi >= \int_{M^n} \alpha \wedge \varphi.$$

1) Si $N^k \subset M^n$ est une sous-variété orientée et compacte de M de dimension k, alors on définit un courant $c_{N^k} \in C_k(M^n)$ par la formule : $< c_{N^k}, \varphi >= \int_{N^k} \varphi$ pour tout $\varphi \in \Omega^k(M^n)$.
D'après la formule de Stokes, son bord courant est $c_{\partial N^k}$.

2) Courants réguliers. On suppose que M^n est orientée et compacte à bord vide. Une forme $\alpha \in \Omega^{n-k}(M^n)$ définit un courant de dimension k, noté $c_\alpha \in C_k(M^n)$, par la formule :

$$< c_\alpha, \varphi >= \int_{M^n} \alpha \wedge \varphi.$$

Son bord courant est

$$< \partial c_\alpha, - >= (-1)^{\deg \alpha + 1} \int_M d\alpha \wedge -$$

[exercice : utiliser la formule de Stokes : $\int_M d(\alpha \wedge \lambda) = 0$ si $\deg(\lambda) = k - 1$].

Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ est dite de Morse si $df(a) = 0$ (*i.e.* a point critique de f) implique $\mathrm{Hess} f(a)$ est non-dégénérée (matrice carrée des dérivés secondes inversible).
Les fonctions de Morse sont denses dans les fonctions C^∞ pour la topologie C^∞.

Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ est dite de Morse si $df(a) = 0$ (*i.e.* a point critique de f) implique $\mathrm{Hess} f(a)$ est non-dégénérée (matrice carrée des dérivés secondes inversible).
Les fonctions de Morse sont denses dans les fonctions C^∞ pour la topologie C^∞.

Lemme (Marston Morse, 1925)

Dans ces conditions, il existe des coordonnées $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *au voisinage de* a *et un entier* k *tels que* $f(\underline{x}) = f(a) - \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right) + \left(\sum_{j=k+1}^n x_j^2\right)$.

L'entier k est l'indice de Morse de f en a, noté $\mathrm{ind}_a f$. Les points critiques sont isolés, donc en nombre fini si M est compacte.

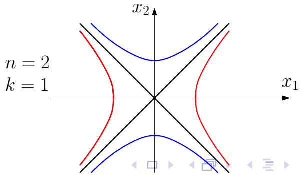
Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ est dite de Morse si $df(a) = 0$ (*i.e.* a point critique de f) implique $\mathrm{Hess} f(a)$ est non-dégénérée (matrice carrée des dérivés secondes inversible).
Les fonctions de Morse sont denses dans les fonctions C^∞ pour la topologie C^∞.

Lemme (Marston Morse, 1925)

Dans ces conditions, il existe des coordonnées $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$ au voisinage de a et un entier k tels que $f(\underline{x}) = f(a) - \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right) + \left(\sum_{j=k+1}^n x_j^2\right)$.

L'entier k est l'indice de Morse de f en a, noté $\mathrm{ind}_a f$. Les points critiques sont isolés, donc en nombre fini si M est compacte.

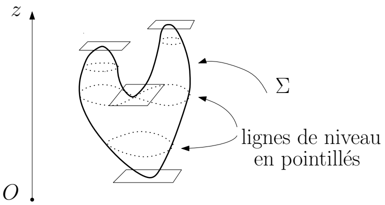
Ex : $f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$
En noir le niveau $f = 0$
En bleu le niveau $f = \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$
En rouge le niveau $f = -\varepsilon$



Si M est une variété compacte à bord vide, le nombre $\#\mathrm{crit}_k f$ des points critiques d'indice k de toute fonction de Morse f est minoré par le k-ème nombre de Betti de M.

Fonction hauteur sur la surface
Σ homéomorphe à la 2-sphère S^2

4 points critiques (plans tangents horizontaux)
1 min. (indice 0) $= b_0(S^2) = 1$
1 selle (indice 1) $> b_1(S^2) = 0$
2 max. (indice 2) $> b_2(S^2) = 1$



On suppose que la variété M est compacte à bord vide.

Variétés stables et instables des points critiques

On suppose que la variété M est compacte à bord vide.
On considère un champ de vecteurs X sur M qui est un gradient *descendant* : $X = -\nabla f$ pour une métrique riemannienne auxiliaire. On note $X^t, t \in \mathbb{R}$, son flot. Toute orbite de X va d'un point critique à un autre point critique (R. Thom, 1949).

On suppose que la variété M est compacte à bord vide.
On considère un champ de vecteurs X sur M qui est un gradient *descendant* : $X = -\nabla f$ pour une métrique riemannienne auxiliaire. On note $X^t, t \in \mathbb{R}$, son flot. Toute orbite de X va d'un point critique à un autre point critique (R. Thom, 1949).

La variété instable *de* $a \in \mathrm{crit}_k f$ *est*

$$W^u(a, X) := \{x \in M \mid \lim_{t\to-\infty} X^t(x) = a\}.$$

Variétés stables et instables des points critiques

On suppose que la variété M est compacte à bord vide.
On considère un champ de vecteurs X sur M qui est un gradient *descendant* : $X = -\nabla f$ pour une métrique riemannienne auxiliaire. On note $X^t, t \in \mathbb{R}$, son flot. Toute orbite de X va d'un point critique à un autre point critique (R. Thom, 1949).

La variété instable *de* $a \in \mathrm{crit}_k f$ *est*
$$W^u(a, X) := \{x \in M \mid \lim_{t \to -\infty} X^t(x) = a\}.$$

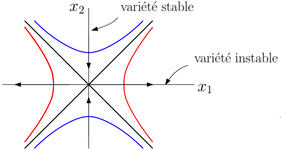
La variété stable *de* $a \in \mathrm{crit}_k f$ *est*
$$W^s(a, X) := \{x \in M \mid \lim_{t \to +\infty} X^t(x) = a\}.$$

On suppose que la variété M est compacte à bord vide.
On considère un champ de vecteurs X sur M qui est un gradient *descendant* : $X = -\nabla f$ pour une métrique riemannienne auxiliaire. On note $X^t, t \in \mathbb{R}$, son flot. Toute orbite de X va d'un point critique à un autre point critique (R. Thom, 1949).

La variété instable *de* $a \in \mathrm{crit}_k f$ *est*
$$W^u(a, X) := \{x \in M \mid \lim_{t \to -\infty} X^t(x) = a\}.$$

La variété stable *de* $a \in \mathrm{crit}_k f$ *est*
$$W^s(a, X) := \{x \in M \mid \lim_{t \to +\infty} X^t(x) = a\}.$$

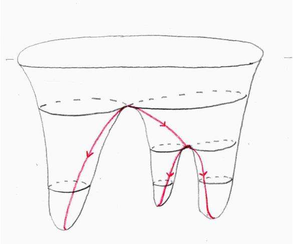
$W^u(a, X)$ est une sous-variété (non compacte) de M difféomorphe à $\mathbb{R}^k$ où $k = \mathrm{ind}_a f$.
$W^s(a, X)$ est une sous-variété (non compacte) de M difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-k}$.



Définition

On dit que X est Morse-Smale si toutes les variétés stables et instables sont mutuellement transverses.

Cette propriété est générique (S. Smale, 1961).

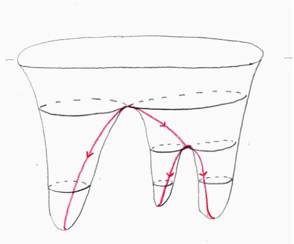


Ce gradient descendant pour la fonction hauteur (lignes rouges) n'est pas Morse-Smale (deux selles reliées par une ligne de gradient).

Définition

On dit que X est Morse-Smale si toutes les variétés stables et instables sont mutuellement transverses.

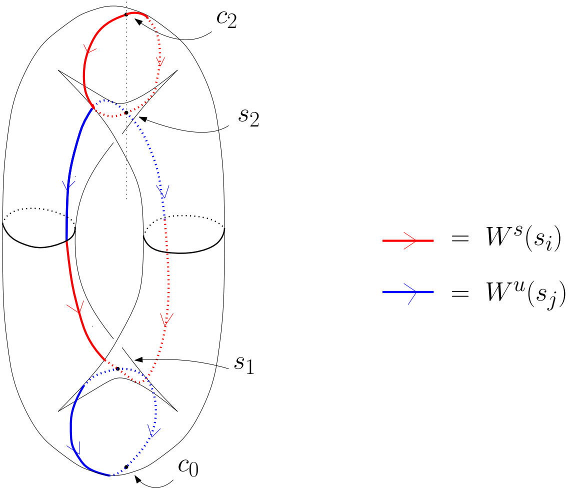
Cette propriété est générique (S. Smale, 1961).



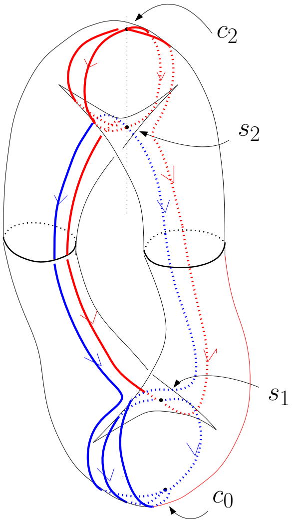
Ce gradient descendant pour la fonction hauteur (lignes rouges) n'est pas Morse-Smale (deux selles reliées par une ligne de gradient).

Si X est Morse-Smale, si a est d'indice k et b d'indice $k-1$, alors $W^u(a, X) \cap W^s(b, X)$ ne contient qu'un nombre fini de lignes de gradient.

Tore à gradient non Morse-Smale



Tore Morse – Smale



Le complexe de Morse est un complexe

$$C_*(f,X) := \left(0 \longleftarrow C_0(f) \xleftarrow{\partial_X} C_1(f) \xleftarrow{\partial_X} \cdots \xleftarrow{\partial_X} C_n(f) \longleftarrow 0\right)$$

basé sur les points critiques de f : $C_k(f) := \mathbb{R} < \mathrm{crit}_k(f) >$.

Le complexe de Morse est un complexe

$$C_*(f,X) := \left(0 \longleftarrow C_0(f) \xleftarrow{\partial_X} C_1(f) \xleftarrow{\partial_X} \cdots \xleftarrow{\partial_X} C_n(f) \longleftarrow 0\right)$$

basé sur les points critiques de f : $C_k(f) := \mathbb{R} < \mathrm{crit}_k(f) >$.

La différentielle. On oriente les variétés stables et instables. Si $a \in \mathrm{crit}_k(f)$,

$$\partial_X(a) = \sum_{b \in \mathrm{crit}_{k-1}(f)} n(a,b)\, b$$

où $n(a,b)$ est le nombre de lignes de gradient comptées algébriquement.

Le complexe de Morse est un complexe

$$C_*(f,X) := \left(0 \longleftarrow C_0(f) \xleftarrow{\partial_X} C_1(f) \xleftarrow{\partial_X} \cdots \xleftarrow{\partial_X} C_n(f) \longleftarrow 0\right)$$

basé sur les points critiques de f : $C_k(f) := \mathbb{R} < \mathrm{crit}_k(f) >$.

La différentielle. On oriente les variétés stables et instables. Si $a \in \mathrm{crit}_k(f)$,

$$\partial_X(a) = \sum_{b \in \mathrm{crit}_{k-1}(f)} n(a,b)\, b$$

où $n(a,b)$ est le nombre de lignes de gradient comptées algébriquement.

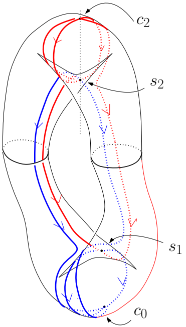
Théorème (Smale, Milnor)

1° $\partial_X \circ \partial_X = 0$. *Donc $C_*(f,X)$ est bien un complexe.*

2° *Son homologie (de dimension finie) est indépendante de (f,X). La dimension de $H_k(C_*(f,X))$ est égal au k-ème nombre de Betti.*

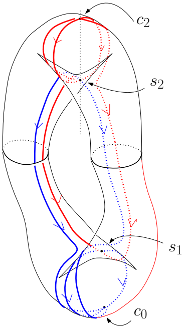
Rappel : $H_k(C_*(f,X)) := \ker \partial_{X\,|C_k(f,X)} / \mathrm{im}\, \partial_{X\,|C_{k+1}(f,X)}$

EXEMPLE. La chambre à air en position Morse-Smale dans $\mathbb{R}^3$ muni de la fonction hauteur et du gradient euclidien.



$$\begin{aligned} \operatorname{ind} c_0 &= 0, \\ \operatorname{ind} s_1 = \operatorname{ind} s_2 &= 1 \\ \operatorname{ind} c_2 &= 2. \end{aligned}$$

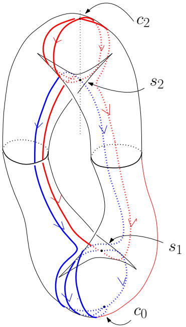
EXEMPLE. La chambre à air en position Morse-Smale dans $\mathbb{R}^3$ muni de la fonction hauteur et du gradient euclidien.



$$\begin{aligned} \operatorname{ind} c_0 &= 0, \\ \operatorname{ind} s_1 &= \operatorname{ind} s_2 = 1 \\ \operatorname{ind} c_2 &= 2. \end{aligned}$$

Le minimum c_0 reçoit deux branches de la selle s_1 avec des signes opposés. Donc $\partial_X(s_1) = 0$; de même pour s_2.

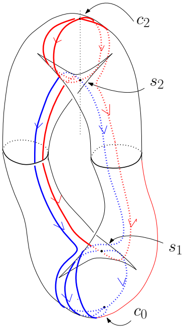
EXEMPLE. La chambre à air en position Morse-Smale dans $\mathbb{R}^3$ muni de la fonction hauteur et du gradient euclidien.



$\operatorname{ind} c_0 = 0,$
$\operatorname{ind} s_1 = \operatorname{ind} s_2 = 1$
$\operatorname{ind} c_2 = 2.$

Le minimum c_0 reçoit deux branches de la selle s_1 avec des signes opposés. Donc $\partial_X(s_1) = 0$; de même pour s_2.
Et $\partial_X(c_2) = 0\, s_1 + 0\, s_2$.

EXEMPLE. La chambre à air en position Morse-Smale dans $\mathbb{R}^3$ muni de la fonction hauteur et du gradient euclidien.



$\operatorname{ind} c_0 = 0,$
$\operatorname{ind} s_1 = \operatorname{ind} s_2 = 1$
$\operatorname{ind} c_2 = 2.$

Le minimum c_0 reçoit deux branches de la selle s_1 avec des signes opposés. Donc $\partial_X(s_1) = 0$; de même pour s_2.
Et $\partial_X(c_2) = 0\, s_1 + 0\, s_2$. Alors le complexe est :

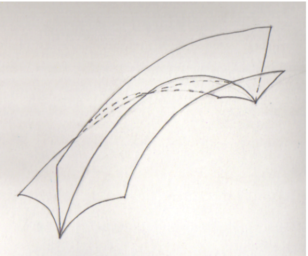
$$0 \longleftarrow \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xleftarrow{0} \mathbb{R} \longleftarrow 0$$

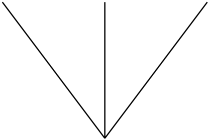
.

On a donc $H_0(T^2) = 0$, $H_1(T^2) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H_2(T^2) = \mathbb{R}$.

Proposition (L. 1992)

Si le gradient est Morse-Smale, la clôture dans M de la variété instable de chaque point critique est un espace stratifié à singularité conique.



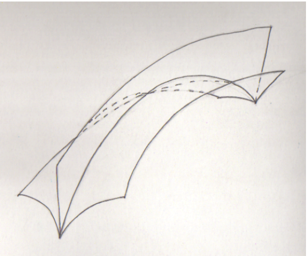


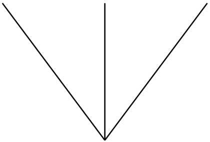
cône sur trois points

Les variétés instables comme courant

Proposition (L. 1992)

Si le gradient est Morse-Smale, la clôture dans M de la variété instable de chaque point critique est un espace stratifié à singularité conique.





cône sur trois points

Corollaire

Dans cette situation, chaque $W^u(a,X)$ est un courant.

c.-à-d. si $\alpha \in \Omega^k(M)$ et $\dim W^u(a,X) = k$, alors $\int_{W^u(a,X)} \alpha$ converge.

Proposition (L. , 1992)

Le complexe de Morse se plonge comme sous-complexe du complexe des courants.

Proposition (L. , 1992)

Le complexe de Morse se plonge comme sous-complexe du complexe des courants.

LE PLONGEMENT. $J : a \in \mathrm{crit}_k f \longmapsto W^u(a, X)$
Voir que J est un morphisme de complexes, c.-à-d. $J \circ \partial_X = \partial \circ J$

Proposition (L. , 1992)

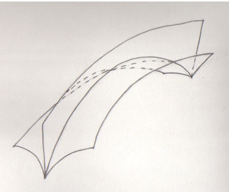
Le complexe de Morse se plonge comme sous-complexe du complexe des courants.

Le plongement. $J : a \in \mathrm{crit}_k f \longmapsto W^u(a, X)$
Voir que J est un morphisme de complexes, c.-à-d. $J \circ \partial_X = \partial \circ J$

Il s'agit d'avoir une formule de Stokes pour les espaces à singularités coniques. Si $\deg a = k$ et $\lambda \in \Omega^{k-1}(M)$, on a

$$\int_{W^u(a,X)} d\lambda = \sum_{b \in \mathrm{crit}_{k-1}(f)} n(a,b) \int_{W^u(b,X)} \lambda.$$

Seules importent dans l'intégrale les singularités de codimension 1 comme sur la figure



$\diamond$

MORPHISME DE RÉGULARISATION : $R_\varepsilon : C_*(M) \to \Omega^{n-*}(M)$.
Il "existe" un groupe de Lie de dimension finie $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ tel que la convolution avec une fonction $\rho_\varepsilon : G \to \mathbb{R}$ positive, d'intégrale 1 et de classe C^∞ (à support dans le ε-voisinage de Id_G) transforme $c \in C_k(M)$ en un courant régulier.

$$c \in C_k(M) \longmapsto R_\varepsilon(c) := \int_G g_*(c)\rho_\varepsilon(g)\, dvol_G \in \Omega^{n-k}(M)\,.$$

Morphisme de régularisation : $R_\varepsilon : C_*(M) \to \Omega^{n-*}(M)$.
Il "existe" un groupe de Lie de dimension finie $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ tel que la convolution avec une fonction $\rho_\varepsilon : G \to \mathbb{R}$ positive, d'intégrale 1 et de classe C^∞ (à support dans le ε-voisinage de Id_G) transforme $c \in C_k(M)$ en un courant régulier.

$$c \in C_k(M) \longmapsto R_\varepsilon(c) := \int_G g_*(c)\rho_\varepsilon(g) dvol_G \in \Omega^{n-k}(M)\,.$$

Propriétés. 1) $dR_\varepsilon(c) = R_\varepsilon(\partial c)$.

MORPHISME DE RÉGULARISATION : $R_\varepsilon : C_*(M) \to \Omega^{n-*}(M)$.
Il "existe" un groupe de Lie de dimension finie $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ tel que la convolution avec une fonction $\rho_\varepsilon : G \to \mathbb{R}$ positive, d'intégrale 1 et de classe C^∞ (à support dans le ε-voisinage de Id_G) transforme $c \in C_k(M)$ en un courant régulier.

$$c \in C_k(M) \longmapsto R_\varepsilon(c) := \int_G g_*(c)\rho_\varepsilon(g)dvol_G \in \Omega^{n-k}(M)\,.$$

PROPRIÉTÉS. 1) $dR_\varepsilon(c) = R_\varepsilon(\partial c)$.

2) Si c est un cycle ($\partial c = 0$), alors $R_\varepsilon(c) - c$ est un bord.

Morphisme de régularisation : $R_\varepsilon : C_*(M) \to \Omega^{n-*}(M)$.
Il "existe" un groupe de Lie de dimension finie $G \subset \mathrm{Diff}(M)$ tel que la convolution avec une fonction $\rho_\varepsilon : G \to \mathbb{R}$ positive, d'intégrale 1 et de classe C^∞ (à support dans le ε-voisinage de Id_G) transforme $c \in C_k(M)$ en un courant régulier.

$$c \in C_k(M) \longmapsto R_\varepsilon(c) := \int_G g_*(c)\rho_\varepsilon(g)dvol_G \in \Omega^{n-k}(M)\,.$$

Propriétés. 1) $dR_\varepsilon(c) = R_\varepsilon(\partial c)$.

2) Si c est un cycle ($\partial c = 0$), alors $R_\varepsilon(c) - c$ est un bord.

[3) Si ε tend vers 0, $R_\varepsilon(c) \rightharpoonup c$.]

Un inverse à gauche de la régularisation restreinte à $C_*(f, X)$

On définit $I_k : \Omega^{n-k} \to C_k(f, X)$ par

$$J \circ I_k(\omega) := \sum_{a \in \mathrm{crit}_k(f)} \Big(\int_{W^s(a,X)} \omega \Big) \, W^u(a, X).$$

Un inverse à gauche de la régularisation restreinte à $C_*(f, X)$

On définit $I_k : \Omega^{n-k} \to C_k(f, X)$ par

$$J \circ I_k(\omega) := \sum_{a \in \mathrm{crit}_k(f)} \left(\int_{W^s(a,X)} \omega \right) W^u(a, X).$$

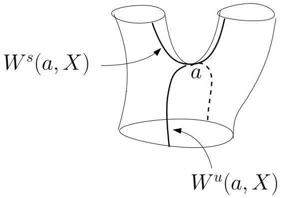
- On vérifie avec la formule de Stokes que $I_{k-1}(d\omega) = \partial_X(I_k(\omega))$.

Un inverse à gauche de la régularisation restreinte à $C_*(f, X)$

On définit $I_k : \Omega^{n-k} \to C_k(f, X)$ par

$$J \circ I_k(\omega) := \sum_{a \in \mathrm{crit}_k(f)} \Big(\int_{W^s(a,X)} \omega \Big) \, W^u(a, X).$$

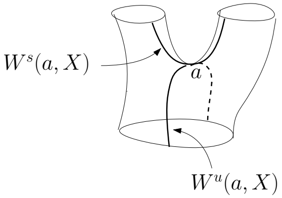
- On vérifie avec la formule de Stokes que $I_{k-1}(d\omega) = \partial_X(I_k(\omega))$.
- De plus, pour ε petit, $\int_{W^s(a,X)} R_\varepsilon\Big((W^u(a,X)\Big) = +1$ et $\int_{W^s(b,X)} R_\varepsilon\left((W^u(a,X)\right) = 0$ pour $b \neq a$.



On définit $I_k : \Omega^{n-k} \to C_k(f,X)$ par

$$J \circ I_k(\omega) := \sum_{a \in \mathrm{crit}_k(f)} \Big(\int_{W^s(a,X)} \omega \Big) \, W^u(a,X).$$

- On vérifie avec la formule de Stokes que $I_{k-1}(d\omega) = \partial_X(I_k(\omega))$.
- De plus, pour ε petit, $\int_{W^s(a,X)} R_\varepsilon\Big((W^u(a,X)\Big) = +1$ et $\int_{W^s(b,X)} R_\varepsilon\left((W^u(a,X)\right) = 0$ pour $b \neq a$.



Alors,

$$J \circ I_k \circ R_\varepsilon = Id_{|J(C_k(f,X))} .$$

Donc, R_ε est injectif.

Il s'agit de voir que R_ε induit un isomorphisme

$$\underline{R}_\varepsilon : H_k\left(C_*(f, X)\right) \to H_{dR}^{n-k}(M)$$

Il s'agit de voir que R_ε induit un isomorphisme

$$\underline{R}_\varepsilon : H_k\left(C_*(f,X)\right) \to H^{n-k}_{dR}(M)$$

On a vu R_ε est injectif. Il s'ensuit que $\underline{R}_\varepsilon$ est injectif. Reste à voir qu'il est surjectif.

Il s'agit de voir que R_ε induit un isomorphisme

$$\underline{R}_\varepsilon : H_k\left(C_*(f, X)\right) \to H^{n-k}_{dR}(M)$$

On a vu R_ε est injectif. Il s'ensuit que $\underline{R}_\varepsilon$ est injectif. Reste à voir qu'il est surjectif.

Critère d'exactitude. *Si une forme fermée ω de degré $n-k$ (c.-à-d. $d\omega = 0$) a une intégrale nulle sur les variétés stables de tous les points critiques d'indice k, alors ω est exacte ($\omega = d\lambda$).*

Il s'agit de voir que R_ε induit un isomorphisme

$$\underline{R}_\varepsilon : H_k\left(C_*(f,X)\right) \to H^{n-k}_{dR}(M)$$

On a vu R_ε est injectif. Il s'ensuit que $\underline{R}_\varepsilon$ est injectif. Reste à voir qu'il est surjectif.

CRITÈRE D'EXACTITUDE. *Si une forme fermée ω de degré $n-k$ (c.-à-d. $d\omega = 0$) a une intégrale nulle sur les variétés stables de tous les points critiques d'indice k, alors ω est exacte ($\omega = d\lambda$).*

Pour toute forme fermée ω, la forme $R_\varepsilon \circ J \circ I_k(\omega) - \omega$ satisfait au critère d'exactitude car $\int_{W^s(a,X)} R_\varepsilon(W^u(a,X)) = 1$ si ε est assez petit. Il suit que le morphisme induit

$$\underline{R}_\varepsilon : H_k\left(C_*(f,X)\right) \to H^{n-k}_{dR}(M)$$

est surjectif.

Il s'agit de voir que R_ε induit un isomorphisme

$$\underline{R}_\varepsilon : H_k\left(C_*(f, X)\right) \to H^{n-k}_{dR}(M)$$

On a vu R_ε est injectif. Il s'ensuit que $\underline{R}_\varepsilon$ est injectif. Reste à voir qu'il est surjectif.

Critère d'exactitude. *Si une forme fermée ω de degré $n-k$ (c.-à-d. $d\omega = 0$) a une intégrale nulle sur les variétés stables de tous les points critiques d'indice k, alors ω est exacte ($\omega = d\lambda$).*

Pour toute forme fermée ω, la forme $R_\varepsilon \circ J \circ I_k(\omega) - \omega$ satisfait au critère d'exactitude car $\int_{W^s(a,X)} R_\varepsilon(W^u(a, X)) = 1$ si ε est assez petit. Il suit que le morphisme induit

$$\underline{R}_\varepsilon : H_k\left(C_*(f, X)\right) \to H^{n-k}_{dR}(M)$$

est surjectif.

Le théorème de de Rham est prouvé.