Semi-groupes et applications

Mohand Moussaoui, Professeur associé

Ecole Normale Supérieure, Kouba, Alger

Doctoriales Nationales de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure de Constantine
28-31/10/2017

Plan de l'exposé :

Soit E un espace de Banach et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans lui même.

Définition

Une famille $G(t)$, $t \in \bar{\mathbb{R}}_+$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$ est appelée semi-groupe si elle vérifie :

1. $G(0) = \mathcal{I}$,
2. $G(t+s) = G(t)G(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

Exemples :

1. **Une équation différentielle :**
   Soit $k \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{C}$ on considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) + k\ y(t) = 0 \quad t > 0, \\ y(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

dont la solution est $y(t) = e^{-kt}x_0$.

$$E = \mathbb{C}, \qquad G(t) : x_0 \to (e^{-kt}).x_0$$

$$G(t) \text{ est la multiplication par } e^{-kt}.$$

- $G(t)$ est un semi-groupe.

2. **Un système différentiel :**
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$ on considère :

$$\begin{cases} Y'(t) + A\ Y(t) = 0 \quad t > 0, \\ Y(0) = X_0. \end{cases} \tag{2}$$

Posons $G(t) = e^{-tA} \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!} \right)$

Alors $Y(t) = e^{-tA}\ X_0$

$$E = \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad e^{-tA} \in \mathcal{L}(E).$$

3. **Une équation abstraite :**
   Soit E un espace de Banach et $A \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$.
   L'équation différentielle :

$$\begin{cases} x'(t) + A\,x(t) = 0 \quad t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

a une unique solution

$$x(t) = e^{-tA} x_0,$$

où $\quad e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!}.$

Remarque : Dans les exemples 2 et 3 l'application $G(t)$ est bien définie au sens des séries normalement convergentes.

Propriétés immédiates : pour les exemples 2 et 3

- $\forall x_0,\ x_0 \in E \qquad \lim_{t \to 0_+} G(t)x_0 = x_0$ dans E.
- $\forall x,\ x \in E, \forall t_0 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0_+} \frac{G(t_0+h)x - G(t_0)x}{h} &= G(t)\ Ax \\ &= A\ G(t_0)x. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow A\ G(t) = G(t)\ A.$$

4. **Translation à droite :**
   $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, pour $u_0 \in E$ et $t \geq 0$ on pose :

$$(G(t)\ u_0)(x) = u_0(x+t).$$

On a

$$G(0)\ u_0 = u_0, \qquad G(t+s)\ u_0 = G(t)\ [G(s)\ u_0].$$

5. **Translation à droite et transport :**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{donnée.} \end{cases} \tag{4}$$

La solution est :

$$u(x,t) = u_0(x+t) = G(t)u_0.$$

- $\{G(t)\}$ est bien défini sur $E = \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$.
- Si $u_0 \in E$ "comment" $G(t)u_0$ est solution de (4) ?.
- Si $u_0 \in E$ et $\frac{du_0}{dx} \in E$ alors tout est clair.

6. **L'équation de chaleur :**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{donnée} \end{cases} \tag{5}$$

avec par exemple $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ pour simplifier.

En faisant une transformation de Fourier en x seulement on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) + \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \end{cases} \tag{6}$$

d'où $\hat{u}(\xi, t) = e^{-t\xi^2} \hat{u}_0(\xi)$ et par Fourier inverse :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = K_t * u_0.$$

En posant $G(t)u_0 = u(x, t)$. $G(t)$ est un semi-groupe.

Semi-groupes et générateurs

Définition

Soit $\{G(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe défini sur un espace de Banach E.

- On dira qu'il est uniformément continu si

$$\lim_{t \to 0_+} \parallel G(t) - \mathcal{I}d \parallel_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

- On dira qu'il est fortement continu si

$$\forall x, x \in E \quad \lim_{t \to 0_+} \parallel G(t)x - x \parallel_E = 0.$$

- On dira qu'il est faiblement continu si

$$\forall x, x \in E, \forall y \in E' : \lim_{t \to 0_+} |< G(t)x - x, y >| = 0.$$

Proposition

On peut vérifier assez facilement que les semi-groupes des exemples 1, 2 et 3 sont uniformément continus.

Définition

Soit $\{G(t), t \geq 0\}$ un semi-groupe défini sur un espace de Banach E.
Posons

$$\Lambda = \{u \in E; \lim_{t \to 0_+} \frac{G(t)u - u}{t} \text{ existe dans } E\}.$$

L'opérateur A de Λ dans E défini par

$$Au = \lim_{t \to 0_+} \frac{G(t)u - u}{t}$$

est appelée générateur infinitésimal de $G(t)$.

$0_E \in \Lambda$: A est linéaire "non borné" en général de domaine $D(A) = \Lambda$.

Théorème

Un opérateur A est le g.i d'un semi-groupe $G(t)$ uniformement continu si et seulement si $A \in \mathcal{L}(E)$ et $G(t) = e^{tA}$.

Corollaire

Soit $G(t)$ un s.g uniformément continu dans $\mathcal{L}(E)$. Alors :

a. $\exists \omega \geq 0$ t.q $\| G(t) \| \leq e^{\omega t}$,

b. $\exists A \in \mathcal{L}(E)$ unique tel que $G(t) = e^{tA}$.

c. $t \to G(t)$ est dérivable avec

$$\frac{d}{dt} G(t) = AG(t) = G(t)A.$$

Conséquence : pour $u_0 \in E$, $u = G(t)u_0$ vérifie :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{7}$$

Théorème

Soit A le g.i d'un $\mathcal{C}_0$ semi-groupe. Alors :

- $\forall u \in E \quad \int_0^t G(s)uds \in D(A)$ et $A(\int_0^t G(s)uds) = G(t)u - u$
- $\forall u \in D(A) \quad \frac{d}{dt}G(t)u = AG(t)u = G(t)Au.$
- A est fermé à domaine dense.

$$\{G(t), G(t)\textcolor{red}{unif.cont}\} \longleftrightarrow \{\mathcal{L}(E); \text{ générateurs}\}.$$

$$\{G(t), C_0\} \longrightarrow \{A \text{ n.b, fermés, } \overline{D(A)} = E\}.$$

Question : $\longleftarrow$

Étant donné $(A, D(A))$ construire "e^{tA}".
Besoin d'un ingrédient supplémentaire la résolvante.

Définition

Soit A un o.n.fermé.

- $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad (\lambda\mathcal{I} - A) \text{ bijectif}\}$ ensemble résolvant.
- $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ spectre.
- $R(\lambda, A) = (\lambda\mathcal{I} - A)^{-1}$ résolvante.

Remarque : Th. du graphe fermé $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(E)$.

Formule : pour μ et λ dans $\rho(A)$ on a :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A).R(\mu, A).$$

Théorème

Soit $\{G(t), t \geq 0\}$ un $\mathcal{C}_0$-s.g de type ω_0 :

$$\omega_0 = \{\inf \omega, \quad \exists M \text{ et } \parallel G(t) \parallel \leq Me^{\omega t}\}.$$

Soit $(A, D(A))$ son g.i alors

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega_0\}.$$

Formule : soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\lambda > \omega_0$ alors

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) dt.$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (G(t), t \geq 0) \arrow[dl] \arrow[dr, "R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) dt"] & \\
(A, D(A)) \arrow[rr, shift left] & & (R(\lambda, A))_{\lambda \in \rho(A)} \arrow[ll, shift left, "A = \lambda - R(\lambda, A)^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Récapitulation : A g.i d'un $\mathcal{C}_0$-s.g alors :

(c_1). A est fermé, $\overline{D(A)} = E$.

(c_2). $\sigma(A) \subset 1/2$ plan de $\mathbb{C}$.

$\{c_1, c_2\}$ conditions nécessaires ! suffisantes ?. Non.

Idée naturelle :

Retour à la fonction "e^{tA}" :

a). $e^{tA} = \sum \frac{t^n A^n}{n!}$ pas bonne.

b). Intégrale de Cauchy :

$$e^{tA} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\lambda t} R(\lambda, A) d\lambda,$$

mais γ ne peut être borné.

- Cela marche dans certaines classes d'opérateurs.

c). $e^{tA} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n}{t} R(\frac{t}{n}, A)\right]^n \quad (\sim (1 + \frac{t}{n}A)^n)$

$$(\sim (1 - \frac{t}{n}A)^{-n})$$

- Cela marche sous certaines conditions.

d). Chercher $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E)$, $A_n \longrightarrow A$ t.q

$$e^{tA} = \lim e^{tA_n}.$$

Si cette limite existe et définit un $\mathcal{C}_0$-s.g.

Définition

Un $\mathcal{C}_0$-semi groupe $G(t)$ est dit de contractions si $\| G(t) \| \leq 1, \forall t \geq 0$ $(M = 1, \omega = 0)$.

Théorème de Hille- Yosida :

Théorème

Soit $(A, D(A))$ un o.n.b sur un espace de Banach E. Nous avons équivalence entre :

(a) $(A, D(A))$ génère un $\mathcal{C}_0$-s.g de contractions.

(b) A est fermé à domaine dense,
$\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et $\forall \lambda > 0 \quad \| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Base :

$$A_n := nR(n, A) = n^2 R(n, A) - \mathcal{I},$$

$$G_n(t) = e^{tA_n}$$

Théorème de Lumer-Phillips

- **Application de dualité**

E espace de Banach de dual E'.
Pour $u \in E$ on définit l'application en général multivoque par :

$$F(u) = \{L \in E'; \quad < L, u > = \| u \|_E^2 = \| L \|_{E'}^2\}.$$

$F(u)$ n'est jamais vide (H.B.).

(E Hilbert, convexité stricte $\Longrightarrow$ $F(u)$ singleton !).

Définition

$(A, D(A))$ est dissipatif si $\forall u \in D(A)$ il existe $L \in F(u)$ t.q
Re $< Au, L > \leq 0$.
($\Leftrightarrow \forall u \in D(A)$ et $\forall \lambda > 0 \; \| (\lambda \mathcal{I} - A)u \| \geq \lambda \| u \|$.)

Théorème

Soit $(A, D(A))$ n.b. fermé à domaine dense.

a). $\begin{array}{l} A \text{ dissipatif} \\ \exists\lambda_0 \quad / \quad \mathcal{I}m(\lambda_0\mathcal{I} - A) = \mathcal{I} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} A \text{ est le g.i d'un} \\ \text{semi-groupe de contraction} \end{array}$

b). Si A est le g.i d'un $\mathcal{C}_0$-s.g de contraction dans E alors

$$\forall\lambda > 0 \quad \mathcal{I}m(\lambda\mathcal{I} - A) = E \text{ et } A \text{ est dissipatif.}$$

De plus,

$$\forall u \in D(A) \text{ et } \forall L \in F(u) \quad \mathrm{Re} < Au, L > \leq 0.$$

Théorème

Si A est le générateur d'un s.g.f.c et $B \in \mathcal{L}(E)$ alor $(A+B)$ est le générateur d'un s.g.f.c.

Soient $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ deux o.n.b dans E. On dit que B est A-borné si :

- $D(A) \subset D(B)$,
- $\exists a, b$ t.q

$$\| Bu \| \leq a \| Au \|_E + b \| u \|_E \tag{8}$$

La A-borne de B est définie par

$$a_0 = \inf\{a \geq 0;\ \exists b \quad \text{t.q} \quad (8) \text{ est vérifié}\}.$$

Théorème

Si A est le g.i. d'un s.g.f.c et si $a_0 < 1$ alors $(A + B, D(A))$ est le g.i d'un s.g.f.c.

Théorème

Si $(A, D(A))$ est le g.i. d'un s.g de contractions dans un espace réflexif E et si $(B, D(B))$ est dissipatif, A-borné avec $a_0 = 1$ alors $(A + B, D(A))$ est fermable et sa fermèture génère un s.g fort. cont.

Opérateurs maximaux monotones.
H : espace de Hilbert.

Définition

- $(A, D(A))$ monotone si :

$$\forall u \in D(A) : \quad < Au, u > \geq 0.$$

- $(A, D(A))$ maximal si :

$$\exists \lambda_0 \geq 0 \quad \text{t.q} \quad \mathcal{I}m(A + \lambda_0 \mathcal{I}) = H.$$

Théorème

Tout opérateur maximal monotone génère un semi-groupe de contractions.

Les extensions.

- Extension du théorème de Hille-Yosida.
- Extension du théorème de Lumer-Phillips.
- Opérateurs maximaux monotones non nécessairement linéaires.
- Opérateurs sectoriels.

Bibliographie

- Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer – Verlag, 1983.
- K. Engel and R. Nagel, Short course on semigroups. Springer, 2010
- M.G. Crandall and A. Pazy , Semi-Groups of Nonlinear Contractions and Dissipative Sets, Journal of Functional Analysis 3, 376-418 (1969)
- H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland mathematics studies, 5, 1973
- M.G. Crandall and T.M. Liggett, Generation of Semi-Groups of Nonlinear Transformations on General Banach Spaces, American Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 2 (Apr., 1971), pp. 265-298