Résumés des Conférences

données aux
Doctoriales nationales de Mathématiques

du 28 octobre 2017 au 31 octobre 2017

à l'École Normale Supérieure Assia Djebar de Constantine

organisées

par

la Direction Générale des Enseignements
et de la Formation Supérieure

la Direction Générale de la Recherche Scientifique
et du Développement Technologique

et
l'École Normale Supérieure Assia Djebar de Constantine

Conférences plénières

Narayanaswamy Balakrishnan (MaMaster University, Ontario, Canada)
Permanents, Order Statistics, Outliers and Robusness

Chikh Bouzar (Université d'Oran, Algérie)
Ultradérivabilité : un parcours

Pierre Cartier (IHES, France)
Théorie de Galois : Historique et perspectives

François Laudenbach (Université de Nantes, France)
Les courants de de Rham et le complexe de Morse

Brahim Mezerdi (Université de Biskra, Algérie)
On the relaxed control problem for stochastic mean-field systems

Mohand Moussaoui (ENS Kouba, Alger, Algérie)
Semi-groupes et applications

François Murat (Université de Paris VI, France)
La convergence faible et son utilisation : points forts et points faibles

Luciano Pandolfi (Politecnico di Torino, Italie)
Control and identification problems for distributed systems with memory

Paul Raynaud de Fitte (Université de Rouen, France)
Processus de rafle de J. J. Moreau (Moreau's sweeping process)

Alexander Zlotnik (National Reseach University, Moscou, Russie)
Fast Fourier solvers for discretizations of the basic mathematical physics equations

Conférences thématiques

Hacène Belbachir (USTHB, Algérie)
Autour de l'hyperdéterminant

Philippe Bonneau (Université de Lorraine, France)
Quantification et groupes quantiques

Rachid Chabour (Université de Lorraine, France)
Stabilité et stabilisation

Ilaria Damiani (Università di Roma II, Italie)
Algèbres et algèbres de Hopf

Adelhafid Mokrane (ENS de Kouba, Algérie)
Existence et régularité pour certains problèmes elliptiques non linéaires

Permanents, Order Statistics, Outliers and Robusness

Narayanaswamy Balakrishnan

McMaster University, Ontario - Canada

In this talk, I will first introduce the notion of permanents in linear algebra, and present some of its basic properties and features. I will then explain its usefulness in a range of statistical problems such as in the study of order statistics, study of outliers and robustness, ranked set sampling and inference. I will give some examples to illustrate all these applications as well as some numerical results to show how the results could be used in practice and how they can be interpreted.

Ultradérivabilité : un parcours

Chikh Bouzar

Université d'Oran 1 - Algérie

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω. On note par $\mathcal{A}(\Omega)$ l'espace des fonctions analytiques réelles dans Ω. On a

$$\mathcal{A}(\Omega) \subsetneq \mathcal{C}^\infty(\Omega).$$

Le résultat classique suivant caractérise une fonction analytique réelle.

Théorème. *Soit* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, *alors* $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ *si et seulement si* $\forall K$ *compacte de* $\Omega, \exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\max_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!.$$

Il est facile de voir la généralisation suivante de la notion de fonction analytique réelle.

Définition. *Soit* $s > 0$, *l'espace de Gevrey d'indice* s, *noté* $\mathrm{G}^s(\Omega)$, *est l'ensemble des* $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *vérifiant* $\forall K$ *compacte de* $\Omega, \exists C > 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\max_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}\alpha!^s.$$

Il est évident que l'espace $\mathcal{A}(\Omega) = G^1(\Omega)$, et on a

$$\mathcal{A}(\Omega) \subsetneq G^s(\Omega) \subsetneq \mathcal{C}^\infty(\Omega), s > 1.$$

Le concept de fontion ultradérivable sera développé suivant divers sens. Et nous exposerons les propriétés principales de ces fonctions. Quelques applications seront données comme illustrations de l'importance des espaces de fonctions ultradérivables.

Références

[1] A. Beurling, Quasi-analyticity and general distributions, Lecture 4 and 5, AMS Summer Institute, Stanford, (1961).

[2] G. Björck : Linear partial differential operators and generalized distribution, Ark. Mat. 6, 351–407, (1966).

[3] R. P. Boas, Jr., A theorem on analytic functions of a real variable, A. M. S. Bulletin 41, 233-236. (1935).

[4] P. Bolley, J. Camus, L. Rodino, Hypoellipticité analytique-Gevrey et itérés d'opérateurs, Ren. Sem. Mat. Univers. Politec. Torino, Vol. 45-3, 1–61.(1989).

[5] E. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup, IV, ser. 12, p ; 9-55, (1895).

[6] C. Bouzar, R. Chaïli, Gevrey vectors of multi-quasielliptic systems. Proc. A. M. S., 131 (5), p. 1565-1572, (2003).

[7] C. Bouzar, A. Dali, The Gevrey regularity of multi-quasielliptic operators. Annali dell'Università di Ferrara, vol. 57, p. 201-209, (2011).

[8] J. Bonet, R. Meise, and S. N. Melikhov, A comparison of two different ways to define classes of ultradifferentiable functions, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 14, 424–444, (2007).

[9] R. W. Braun, R. Meise, and B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis, Results Math. 17, no. 3-4, 206–237, (1990).

[10] A. Denjoy, Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, C. R. Acad. Sci. Paris 173, 1320–1322, (1921).

[11] M. Gevrey, Sur la nature analytique des solutions des equations aux dérivées partielles. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup, 35, p. 129-190, (1918).

[12] Hadamard, J.,. Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, C. R. Séances Soc. Math. France, 28-29, (1912).

[13] H. Komatsu, Ultradistributions I, Structure theorems and characterisation. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I.A. Math. 20, p. 25-105, (1973).

[14] N. Lerner, Y. Morimoto, K. Pravda-Starov and C.-J. Xu : Gelfand-Shilov and Gevrey smoothing effect for the spatially inhomogeneous non-cutoff Kac equation, J. Funct. Analysis, 269, 459-535. (2015).

[15] C. Roumieu, Sur quelques extentions de la notion de distributions. Ann. Sc. Ec. Norm. 3^{eme} serie, Tome. 77, n°. 1. p. 41-121, (1960).

[16] L. Zanghirati, Iterati di una classe di operatori upoelliptici e classi generalizzate di Gevrey. Suppl. Boll. U. M. I., p. 177-195, (1980).

[17] T. Carleman, Les fonctions quasi-analytiques, Collection Borel, Gauthier-Villars, (1926).

[18] S. G. Gindikin, L. R. Volevich. The method of Newton polyhedron in the theory of partial differential equations. Kluwer, (1992)

[19] L. Hörmander. The analysis of linear partial differential operators, T. I, II. Springer, (2003) and (2005).

[20] L. Hörmander, Linear partial differential operators. Springer, (1963).

[21] S. Krantz and H. Parks, A Primer of Real Analytic Functions, Birkhauser-Verlag, (1992).

[22] J. L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogenes et appliquations, Vol 3. Dunod, (1970).

[23] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, régularisation des suites, applications. Gauthier-Villars, (1952).

[24] A. Pringsheim, Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mü beschrankten Existenzbereich, Mathematische Annalen, vol.42, p. 180, (1893).

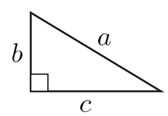
[25] L. Rodino. Linear partial differential operators in Gevrey spaces. World Scientific, (1993).

Théorie de Galois
Historique et perspectives

Pierre Cartier
IHES - France

1. Théorie des équations avant Galois

La résolution des équations du 2^e degré est liée profondément à la géométrie par l'intermédiaire du théorème de Pythagore



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Elle date d'au moins 2500 ans. D'autres problèmes géométriques célèbres : duplication du cube, trisection de l'angle, ont défié tous les efforts de résolution par des méthodes géométriques ou algébriques. Une conséquence des résultats de Galois est la preuve de l'impossibilité.

Les premiers progrès, vers 1500-1550, sont dus à des mathématiciens italiens : del Ferro, Cardano, Ferrari, qui obtiennent la résolution des équations de degré 3 et 4 au moyen de radicaux. L'avancée décisive est obtenue au 18^e siècle par Lagrange, Vandermonde et surtout Gauss. Ce dernier prouve d'abord le "théorème fondamental de l'algèbre" (dit de d'Alembert-Gauss) : *toute équation polynomiale à coefficients réels ou complexes possède au moins une solution complexe.* Gauss, après Lagrange, s'intéresse à la cyclotomie, ou construction des polygones réguliers. Il donnera une construction du polygone régulier à 17 côtés comme corollaire de ses résultats généraux.

2. L'arrivée de Galois (et Abel)

Après beaucoup d'efforts infructueux pour résoudre par radicaux l'équation du 5^e degré, Ruffini, vers 1800, démontre (presque correctement) l'impossibilité d'une telle résolution. Ce sera fait de manière complète par Abel en 1827. Abel et Galois vivront peu, victimes l'un et l'autre de la vague réactionnaire qui balaya l'Europe après la chute de Napoléon.

Le point crucial de Galois est le suivant : étant donnée une équation $g(x) = 0$ de degré n avec les racines $x_1, \dots, x_n$, il existe une fonction v de $x_1, \dots, x_n$, solution d'une équation $f(v) = 0$ de degré m avec les propriétés suivantes :

a) chaque x_i s'exprime comme un polynome $\xi_i(v)$
b) si $v, v', v'', \dots$ sont les racines de l'équation $f(v) = 0$, alors $(\xi_1(v'), \dots, \xi_n(v'))$ est une permutation de $x_1, \dots, x_n$
c) les permutations de $x_1, \dots, x_n$ ainsi définies forment un *groupe* Γ.

De plus, l'équation donnée est *résoluble* par radicaux si et seulement si le groupe Γ est *résoluble*. En particulier, il est impossible de résoudre par radicaux une équation "générale" de degré ≥ 5.

Les travaux de Galois, soumis en 1831 à Cauchy (qui connaît bien le sujet), ne seront publiés qu'en 1850 par Liouville, et développés surtout par Jordan dans son "Traité des substitutions".

3. Les héritiers de Galois

Les résultats de Galois ont influencé énormément le développement de l'algèbre et de la théorie des nombres.

Pour la présentation générale, Dedekind, puis Steinitz, développeront la théorie générale des corps commutatifs, et la théorie de Galois devient celle des extensions de corps. Dans un cours publié en 1946, Artin donne la formulation "moderne" sous forme d'une dualité entre sous-corps et sous-groupes et simplifie les preuves. On trouvera un exposé détaillé dans Bourbaki, Algèbre, Chapitre 5. Un peu plus tard, en 1962, Grothendieck donne une formulation plus géométrique (ou combinatoire) qui relie la théorie de Galois à la théorie topologique du groupe fondamental (ou de Poincaré). La méthode de Grothendieck incorpore le cas des extensions de degré infini (introduit par Krull, puis Chevalley vers 1930).

La théorie arithmétique se développe autour de la *théorie du corps de classes* (Hilbert, Takagi, Artin, Hasse, Chevalley, Tate, ...). Il s'agit en principe de la détermination du groupe de Galois "absolu" (groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes du corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques). L'étude du plus grand quotient abélien $\mathcal{G}_{ab}$ de $\mathcal{G}$ est très avancée, mais le cas non abélien reste un des défis mathématiques actuels.

4. Méthodes explicites

Galois, avec une certaine désinvolture, précise qu'il donne une méthode théorique de calcul du groupe de Galois d'une équation, mais qu'il laisse le calcul effectif aux soins du lecteur. Alain Connes s'est amusé à suivre jusqu'au bout un exemple assez simple, mais a rencontré en chemin des nombres entiers de l'ordre de 10^{400}, ce qui était totalement inaccessible il y a encore 40 ans avec les meilleurs ordinateurs.

Un problème très ouvert est le problème inverse : "Etant donné un groupe fini G, trouver une équation à coefficients rationnels ayant ce groupe pour groupe de Galois". Dans les années 1970, j'ai montré que pour le groupe simple d'ordre 168, l'équation $x^7 - 7x + 3 = 0$ possède ce groupe comme groupe de Galois. La démonstration était "à la main", mais plus tard, mon étudiante Annick Valibouze, a appliqué les méthodes informatiques qu'elle avait développées dans sa thèse pour donner une preuve "automatique". Plus tard, en collaboration avec J.M. Arnaudies, elle a développé un système informatique qui calcule le groupe de Galois d'une équation de degré ≤ 18 à coefficients rationnels.

5. Equations différentielles

Vers 1900, E. Picard avec son collaborateur E. Vessiot a développé une théorie de Galois pour les équations différentielles linéaires. Si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base des solutions d'une équation différentielle linéaire de degré n (à coefficients polynomiaux, disons), on considère le groupe des transformations linéaires à coefficients constants de $f_1, \ldots, f_n$, qui respectent les relations polynomiales de la forme

$$P\left(x, f_1, f_1^{(1)}, \ldots, f_1^{(n-1)}, \ldots, f_n, \ldots, f_n^{(n-1)}\right) = 0\,.$$

Ce groupe est un groupe algébrique, qui est résoluble si et seulement si l'équation est résoluble au moyen d'équations auxiliaires du type $f' = \varphi$ ou $f' = \varphi\, f$ (primitives). E. Kolchin, vers 1940, a pris ce prétexte pour développer la théorie des groupes algébriques (reprise ensuite par son ami et collègue C. Chevalley). Il s'agit d'un sujet fort actif de recherches, renouvelé en partie par l'utilisation des catégories (catégories tannakiennes, groupes de Galois quantiques, ...). J.P. Ramis a utilisé ces méthodes pour résoudre des problèmes classiques de mécanique (double pendule ...).

6. Périodes

Les périodes sont des intégrales définies d'un certain type, généralisant la période d'un pendule, ou celle du mouvement périodique d'une planète autour du soleil. Exemple type

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Les fonctions à intégrer sont des fonctions rationnelles, le domaine d'intégration est donné par des inégalités, ici

$$t \geq 0\,, \quad 1 - t \geq 0$$

faisant intervenir des polynômes. Entre ces intégrales, on a des relations telle que l'additivité par rapport à la fonction intégrée, changement de variable, intégration par parties. Ces périodes sont des nombres, mais on peut aussi les considérer comme des symboles algébriques, obéissant aux règles déjà énoncées de manière formelle. Ceci nous conduit à introduire un ensemble $\mathcal{P}^m$ de périodes formelles (dites aussi motiviques) et une application d'évaluation $e\,v : \mathcal{P}^m \to \mathbb{R}$, qu'on *postule être injective* (Grothendieck-Zagier-Kontsevich). Le groupe de Galois motivique $\mathcal{G}^m$ se compose des automorphismes de l'anneau $\mathcal{P}^m$ (respectant addition et multiplication). Il est crucial que l'ensemble des conjugués, i.e. des transformés $g \cdot p$ ($g \in \mathcal{G}^m$) d'une période $p \in \mathcal{P}^m$ soit contenu dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. La théorie usuelle des nombres algébriques et du groupe absolu $\mathcal{G}$ est contenue dans cette nouvelle théorie. Par exemple, les conjugués de π sont les multiples $a \cdot \pi$ où a est rationnel. De même, si l'on note $\zeta(k)$ la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^k$ pour $k = 2, 3, \ldots$ les conjugués de $\zeta(k)$ sont les nombres de la forme $a^k\,\zeta(k) + b_k$ (k impair) avec a, b_k rationnels. La conjecture de Grothendieck-Zagier-Kontsevich implique que tous les nombres π, $\zeta(3)$, $\zeta(5) \ldots$ sont transcendants et algébriquement indépendants.

Par ailleurs, en physique (théorie des champs quantiques), on utilise des intégrales qui sont des périodes, et le groupe de Galois motivique donne naissance à un *groupe de Galois cosmique* : il s'agit d'un nouveau groupe de symétrie agissant sur les constantes fondamentales de la physique (masse des particules, constantes de couplages). Beaucoup reste à faire dans cette direction !

Pierre Cartier
Directeur de Recherches émérite
CNRS/IHES
Bures-sur-Yvette, France

Les courants de de Rham et le complexe de Morse

François Laudenbach

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Nantes - France

Résumé. Dans tout cet exposé, M^n désignera une variété compacte connexe de dimension n à bord vide ($\partial M = \emptyset$) ; pour simplifier on la supposera orientable. Pour $n = 2$, penser à une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$.

A. - Formes différentielles et courants

Les formes différentielles étaient connues d'Élie Cartan. En dimension 2 et dans des coordonnées locales (x, y), une forme différentielle de degré k s'écrit comme suit : pour $k = 0$, c'est une fonction réelle $f(x, y)$ lisse (c.-à-d. de classe C^∞) ; pour $k = 1$, c'est une combinaison $\alpha(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy$; pour $k = 2$, c'est une expression $\omega(x, y) = c(x, y)dx \wedge dy$. Il faut comprendre que a, b et c sont des fonctions lisses, que $\{dx, dy\}$ est la base canonique de l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ et que $dx \wedge dy$ est la forme bilinéaire antisymétrique canonique sur $\mathbb{R}^2$.

On notera $\Omega^k(M)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré k sur M. Pour $k > n$, cet espace est nul pour raison algébrique. On a une différentielle $d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$; par exemple,

$$d\alpha(x, y) = \left(\frac{\partial b}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial a}{\partial y}(x, y)\right) dx \wedge dy.$$

On a déduit du lemme de Schwarz sur les dérivées secondes croisées la relation fondamentale

$$d_k \circ d_{k-1} = 0,$$

ce qui revient à dire que le noyau de d_k contient l'image de d_{k-1}. Dans la suite on notera $d_k = d$ pour tout degré et la relation fondamentale devient $d \circ d = 0$. On dit que la suite

$$\Omega(M)^* := \left(\Omega^0(M^n) \xrightarrow{d} \Omega^1(M^n) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M^n) \longrightarrow 0\right)$$

est un *complexe*; il est appelé le complexe de de Rham. Il revient à Georges de Rham d'avoir montré dans les années 20 que l'espace vectoriel (aujourd'hui appelé le *k-ème groupe de cohomologie de de Rham*)

$$H^k_{dR}(M) := \frac{\ker d}{\operatorname{Im} d}$$

est de dimension finie. En fait, de Rham montre que cette dimension coïncide avec l'invariant topologique découvert par Henri Poincaré et qu'il a appelé le *k-ème nombre de Betti*. Par exemple, si M est une surface, la dimension de $H^1_{dR}(M)$ est le double du *genre* de la surface.

Après la découverte par Laurent Schwartz des *Distributions* comme fonctionnelles sur l'espace des fonctions C^∞ à support compacte dans $\mathbb{R}^n$, de Rham a suivi la même démarche avec les formes différentielles. Un *courant de dimension k* sur la variété M est un élément du dual topologique de $\Omega^k(M)$. Les courants ont donné à de Rham un nouvel outil pour démontré son ancien théorème de façon plus naturelle ; ceci est expliqué dans son livre [15]. Notons $C_k(M)$ le dual topologique de $\Omega^k(M)$. Par transposition, on obtient un opérateur *bord* $\partial : C_k(M) \to C_{n-k}(M)$. Pour $c \in C_k(M)$ et $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, le bord de c est défini par la formule

$$\langle \partial c, \alpha \rangle = \langle c, d\alpha \rangle.$$

On obtient donc le complexe des courants

$$C_*(M) := \left(C_0(M) \xleftarrow{\partial} C_1(M) \xleftarrow{\partial} \cdots \xleftarrow{\partial} C_n(M) \right).$$

Les deux exemples de courants donnés ci-dessous sont des *courants d'intégration* car ils sont continus sur les formes différentielles munies de la topologie C^0 :

1. Soit $N^k \subset M^n$ une sous-variété compacte orientée de dimension k. Soit $\omega \in \Omega^k(M)$. La fonctionnelle $\omega \mapsto \int_N \omega$ est un courant. De la formule de Stokes on déduit que ∂c est le courant d'intégration sur le bord géométrique orienté de N.
2. Soit $\lambda \in \Omega^{n-k}$. La fonctionnelle $\omega \mapsto \int_M \lambda \wedge \omega$ est un courant de dimension k appelé *courant régulier*. Son bord est, au signe près, la fonctionnelle $\alpha \mapsto \int_M d\alpha \wedge \alpha$ pour $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$.

Nous expliquerons dans notre exposé que le rapprochement de ces notions et de la théorie de Morse donne une preuve simple du théorème de de Rham. Dans la section suivante nous présentons rapidement la théorie de Morse dans son approche dynamique due à S. Smale.

B.- Le complexe de Morse

La notion de fonction de Morse remonte (évidemment) à Marston Morse [10] qui l'avait introduite pour l'appliquer au *Calcul des variations*. Une fonction réelle lisse $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non-dégénérés, c.-à-d. : pour tout point $a \in M$ tel que $df(a) = 0$ la forme quadratique $d^2f(a)$ est de rang maximum (ou la matrice hessienne des dérivées partielles secondes est inversible). Dans ce cas, le *Lemme de Morse* dit qu'il existe un entier $0 \leq k \leq n$ et des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ (dits de Morse) au voisinage de a où f s'écrit :

$$f(x_1, ..., x_n) = f(a) - (x_1^2 + ... + x_k^2) + (x_{k+1}^2 + ... + x_n^2).$$

L'entier k ne dépend pas des coordonnées de Morse choisies ; il s'appelle l'indice de Morse de f en a. M. Morse a montré [11, Th. 8.1] que les fonctions de Morse forment un ouvert dense dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Comme les points critiques de Morse sont isolés, ils sont en nombre fini dans M qui est compacte.

Avec Stephen Smale [17], considérons une fonction de Morse f et son gradient ∇f pour une métrique riemannienne μ qui coïncide avec la métrique euclidienne des coordonnées de Morse au voisinage des points critiques de f. On rappelle l'identité définissant le gradient :

$$\langle \nabla f(x), - \rangle_\mu = df(x)(-),$$

où la place libre est pour tout vecteur tangent à M en x. Si $a \in \mathrm{crit} f$, la *variété stable* $W^s(a, \nabla f)$ (resp. *instable* $W^u(a, \nabla f)$) est l'ensemble des points $x \in M$ dont l'image $(\nabla f)^t(x)$ par flot du gradient tend vers a pour t tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). On rappelle que le flot d'un champ de vecteurs sur une variété compacte est défini pour tout $t \in (-\infty, +\infty)$. On établit facilement que $W^s(a, \nabla f)$ est une sous-variété de M difféomorphe à $\mathbb{R}^k$; de même $W^u(a, \nabla f)$ une sous-variété de M difféomorphe à $\mathbb{R}^{n-k}$.

Smale a prouvé que, génériquement sur μ, le gradient a la propriété que toutes les variétés stables et instables s'intersectent deux à deux transversalement. Un tel gradient est dit *Morse-Smale*. Cette hypothèse sera toujours faite dans la suite. On note $\mathrm{crit}_k f$ l'ensemble des points critiques d'indice k. Pour $a \in \mathrm{crit}_k f$ et $b \in \mathrm{crit}_{k-1} f$, il y a au plus un nombre fini d'orbites du gradient reliant b à a. Si des orientations ont été choisies pour chaque variété stable (donc des coorientations pour chaque variété instable) alors chaque orbite de $W^s(a) \cap W^u(b)$ reçoit un signe. On note $n(a, b)$ le nombre algébrique d'orbites de b à a. On définit $C_k(f, \nabla f)$ comme le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $\mathrm{crit}_k f$. La différentielle $\partial : C_k(f, \nabla f) \to C_{k-1}(f, \nabla f)$ est donnée sur le générateur $a \in \mathrm{crit}_k f$ par

$$\partial a = \sum_{b \in \mathrm{crit}_{k-1} f} n(a, b)\, b.$$

On prouve que $\partial \circ \partial = 0$ et on définit le *complexe de Morse*

$$C_*(f, \nabla f) := \left(C_n(f, \nabla f) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(f, \nabla f) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(f, \nabla) \right).$$

Il est classique de montrer que l'on a un isomorphisme canonique en homologie entree modules de rang fini

$$0 H_k(C_*(f, \nabla f)) \cong H_k(M, \mathbb{Z}),$$

où le membre de droite est l'homologie de Poincaré à coefficients entiers (on obtient l'isomorphisme à coefficients réels en tensorisant par $\mathbb{R}$).

Bien qu'étant des sous-variétés non-propres de M, elles sont tout de même des courants d'intégration [6] : si $a \in \mathrm{crit}_k f$ et $\omega \in \Omega^k(M)$, l'intégrale $\int_{W^s(a)} \omega$ converge absolument. C'est la clé pour prouver facilement le théorème de de Rham.

Comme les distributions, les courants se régularisent par convolution, opération judicieusement transportée par de Rham sur M ; ce sont sans doute les pages les plus fabuleuses du livre [15, §15]. Grâce à cette régularisation, on établit facilement

$$H_k(C_*(f, \nabla f)) \cong H^{n-k}_{dR}(M),$$

ce qui donne le résultat voulu compte tenu de la dualité de Poincaré qui stipule que les nombres de Betti b_k et b_{n-k} sont égaux.

Tout ce matériel, depuis les bases, est exposé dans mon ancien cours à l'École polytechnique [7]. Ces idées ont été reprises par F.R. Harvey & L.B. Lawson [3, 4]. Signalons qu'Edward Witten a donné une approche différente du même résultat dans [18]. Il voit le complexe de Morse comme une limite asymptotique du complexe de de Rham en tordant la différentielle à l'aide de la fonction de Morse f pour $t \in [0, +\infty)$

$$d_t(-) = d(-) + t df \wedge (-).$$

Cette déformation conduit elle aussi à un isomorphisme entre la cohomologie de de Rham et la (co)homologie de Morse à coefficients réels. La preuve complète du programme de Witten a été donnée par B. Helffer & J. Sjøstrand [5] avec des outils d'analyse spectrale (voir aussi R. Bott [1]).

C.- Perspectives

En 1981, Sergueï Novikov [12, 13] s'intéressa aux formes différentielles de degré un, fermées ($d\alpha = 0$) et à zéros non-dégénérés. Une telle forme α est localement la différentielle d'une fonction de Morse ; l'indétermination porte sur une constante additive appartenant à un sous-groupe de $\mathbb{R}$ appelé *groupe des périodes de* α. Novikov voit une 1-forme fermée comme une fonction *multivaluée*.

Le gradient $\nabla\alpha$ est bien défini mais sa dynamique est non-banale si α n'est pas une forme exacte ($\alpha = df$). Il y a des variétés stables et instables pour chaque zéro de α. Génériquement $\nabla\alpha$ est Morse-Smale en vertu du théorème de Kupka-Smale (voir le livre de J. Palis & W. de Melo [14]). Mais deux zéros d'indices consécutifs peuvent être reliés par une infinité de lignes de gradient. L'anneau de Novikov, complétion convenable de l'anneau $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ du groupe fondamental de M (avec la contribution de J.-C. Sikorav [16]), permet d'organiser ces laisons en un complexe (homologique), dit de Morse-Novikov.

Par ailleurs, il y a une déformation *à la Witten* du complexe de de Rham, considérée avant la lettre par A. Lichnerowicz [8] :

$$d_t(-) = d(-) + t\alpha \wedge (-), \quad t \geq 0.$$

Des questions naturelles se posent :

1) Est-ce que la cohomologie de Lichnerowicz est indépendante de t pour t assez grand ?

2) Quelle est la relation de sa limite asymptotique avec l'homologie de Morse-Novikov ? Y a-t-il un théorème *à la de Rham* dans ce cadre ?

Références

[1] Bott R., *Morse theory indomitable*, Pub. Math. Inst. I.H.É.S. 68 (1988), 99-114.

[2] Farber M., *Topology of Closed One-Forms,* Math. Surveys and Monographs 108, Amer. Math. Soc., 2004.

[3] Harvey F.R., Lawson H.B., *Morse Theory and Stokes' Theorem,* Surveys in Differential Geometry, vol. VII (2000), 259-311.

[4] ——————————, *Finite Volume Flows and Morse Theory*, Annals of Math. 153, No 1, (2001), 1-25.

[5] Helffer B., Sjøstrand J., *Puits multiples en mécanique semi-classique IV, Étude du complexe de Witten*, Comm. in Partial Diff. Equations 10 vol. 3 (1985), 245-340.

[6] Laudenbach F., *On the Thom-Smale complex*, Appendix to : Bismut J.-M., Zang W., *An extension of a Theorem by Cheeger and Müller*, Astérisque 205 (1992), 219-233.

[7] ——————, *Transversalité, Courants et Théorie de Morse*, Éditions de l'École polytechnique, Ellipses, Paris, 2011.

[8] Lichnerowicz A., *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées,* J. Differential Geom. 12 (2) (1977), 253-300.

[9] Milnor J., *Lectures on the h-cobordism theorem,* Notes by Siebenmann L. and Sondow J., Princeton Math. Notes, 1965.

[10] Morse M., *Relations between thee critical points of a real-valued function of n independent variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 345-396.

[11] ————, *Calculus of variations in the large*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 18, Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1934.

[12] Novikov S.P., *Multivalued functions and functionals. An analogue of Morse theory,* Soviet Math. Doklady 24 (1981), 222-226.

[13] ————, *The Hamiltonian formalism and a mult-vlued analogue of Morse theory,* Russian Math. Surveys 37 vol. 5 (1982), 1-56.

[14] Palis J., de Melo W., Geometric Theory of Dynamical Systems, an introduction, Springer, 1982.

[15] de Rham G., *Variétés Différentiables, Formes, Courants, Formes harmoniques*, Ed. Hermann, Paris 1955. English version : *Differentiable Manifolds, Forms, Currents, Harmonic forms*, Grundlehren 266, Springer, 1984.

[16] Sikorav J.-C., *Points fixes de difféomorphismes symplectiques, intersections de sous-variétés lagrangiennes, et singularités de 1-formes fermées*, thèse d'État, Paris 11, Orsay (1987).

[17] Smale S., *On gradient dynamical systems,* Annals of Math. 74 (1961), 199-206.

[18] Witten E., *Supersymmetry and Morse theory*, J. Diff. Geom. 17 (1982), 661-692.

On the relaxed control problem for stochastic mean-field systems

Brahim Mezerdi

Laboratoire de Mathématiques appliquées

Université Mohamed Khider de Biskra - Algérie

mezerdi@univ-biskra.dz

In this paper, we deal with optimal control of systems driven by mean-field stochastic differential equations (MFSDE) of the form

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, E(\Psi(X_t)), u_t)dt + \sigma(t, X_t, E(\Phi(X_t)), u_t)dW_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

MFSDEs are obtained as limits of some interacting particle systems. This kind of approximation result is called "*propagation of chaos*", which says that when the number of particles (players) tends to infinity, the equations defining the evolution of the particles could be replaced by a single equation, called the McKean-Vlasov equation. This mean-field equation, represents in some sense the average behavior of the infinite number of particles, see [10, 7] for details. Since the earlier papers [8], [6], mean-field control theory has raised a lot of interest, motivated by applications to various fields such as game theory, mathematical finance, communications networks, management of oil ressources. The typical example is the continuous-time Markowitz's mean-variance portfolio selection model, where one should minimize an objective function involving a quadratic function of the expectation, due to the variance term. The main drawback, when dealing with such mean-field stochastic control problems, is that the Bellmann principle of optimality does not hold. One can refer also to the recent book [4] and the references therein.

Our main goal in this work is to investigate existence of optimal controls as well as optimality necessary conditions. As it is well known for classical control problems, in the absence of Fillipov convexity conditions, an optimal strict control may fail to exist. In this case, the set of strict controls should be embedded into a wider class of measure valued controls, called relaxed controls. This class enjoys good compactness and convexity properties. The problem now is to define precisely the MFSDE associated to a relaxed control. At first look, one is tempted, to replace simply the drift and diffusion coefficient by their relaxed couterparts ie : the integrals of the drift and diffusion coefficient with respect to the relaxed control, adopting the same method as in deterministic control. As it will be shown in a simple counter example, the suggested "relaxed" state equation is not continuous with respect to the control variable. This implies in particular that the value functions for the original and relaxed problems are not the same. In addition, there is no mean to prove the existence of an optimal control for this model. The fundamental reason is that one has to relax the quadratic variation, of the stochastic integral part of the state equation, which is a Lebesgue integral, rather than the stochastic integral itself. Roughly speaking, the idea is to relax the generator of the process, which is intimately linked to the weak solutions of the relaxed stochastic equation, rather than the equation itself. As it will be shown, the stochastic equation associated with the relaxed generator will be governed by a continuous orthogonal martingale measure, rather than a Brownian motion.

For this model, we prove that the strict and relaxed control problems have the same value function and that an optimal relaxed control exists. Our result extends in particular known results to mean field controls. The proof is based on tightness properties of the underlying processes and Skorokhod selection theorem. Moreover, due to the compactness of the action space, we show that the relaxed control could be choosen among the so-called sliding controls, which are convex combinations of Dirac measures. As a consequence and under the so-called Fillipov convexity condition, the optimal relaxed control is shown to be strict.

In a second step, we establish necessary conditions for optimality in the form of a relaxed stochastic maximum principle, obtained via the first and second order adjoint processes. This result generalizes Peng's stochastic maximum principle [9], to mean field control problems and [5] to relaxed controls. The other advantage is that our maximum pinciple applies to a natural class of controls, which is the closure of the class of strict controls, for which we have existence of an optimal control. The proof of the main result is based on the approximation of the relaxed control problem by a sequence of strict control problems. Then Ekeland's variational principle is applied to get necessary conditions of near-optimality, for the sequence of near optimal strict controls. The result is obtained by a passage to the limit in the state equation as well as in the adjoint processes. The resulting first and second order adjoint processes are solutions of linear BSDEs driven by a Brownian motion and an orthogonal square integrable martingale. Moreover, our result is given via an approximation procedure, so that it could be convenient for numerical computation. For full details see ([1, 2, 3])

Références

[1] K. Bahlali, M. Mezerdi, B. Mezerdi, *Existence of optimal controls for systems governed by mean-field stochastic differential equations,* Afrika Statistika, Vol. **9** (2014), No 1, 627-645.

[2] K. Bahlali, M. Mezerdi, B. Mezerdi, *Existence and optimality conditions for relaxed mean-field stochastic control problems. Systems Control Lett. 102 (2017), 1–8.*

[3] K. Bahlali, M. Mezerdi, B. Mezerdi, *On the relaxed mean-field stochastic control problem,* Stoch. and Dynamics, Vol. 18, (20 pages), DOI : 10.1142/S0219493718500247, online version.

[4] A. Bensoussan, J. Frehse, P. Yam, *Mean-field games and mean-field type control theory*, Springer briefs in mathematics (2013), Springer Verlag.

[5] R. Buckdahn, B. Djehiche, J. Li, *A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type.* Appl. Math. Optim. **64** (2011), no. 2, 197–216.

[6] Huang, M., Malhamé, R. P., Caines, P. E. *Large population stochastic dynamic games : closed-loop McKean-Vlasov systems and the nash certainty equivalence principle.* Comm. in Inf. and Systems, **6**(3) (2006), 221–252.

[7] B. Jourdain, S. Méléard, W. Woyczynski, *Nonlinear SDEs driven by Lévy processes and related PDEs.* Alea **4** (2008), 1–29.

[8] J.M. Lasry, P.L. Lions, *Mean-field games.* Japan. J. Math., **2** (2007) 229–260.

[9] S. Peng, *A general stochastic maximum principle for optimal control problems.* SIAM J. Control Optim., Vol. **28** (1990), No 4, 966-979.

[10] A.S. Sznitman, *Topics in propagation of chaos.* In Ecole de Probabilités de Saint Flour, XIX-1989. Lecture Notes in Math. 1464, pp. 165–251. Springer, Berlin (1989).

Semi-groupes et applications

Mohand Moussaoui

École Normale Supérieure, Kouba, Alger - Algérie

Les problèmes d'évolution associés à des équations ou systèmes d'équations aux dérivées sont très courants et dans de nombreux domaines. On les retrouve, entre autres, dans la modélisation de phénomènes de la physique, de la mécanique, de la chimie, de la biologie etc...

Ils décrivent l'évolution dans le temps des caractéristiques d'une ou plusieurs quantités physiques intervenant dans un phénomène donné.

De manière assez générale, si une fonction, scalaire ou vectorielle, U, représente une quantité à étudier cette fonction est définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ d'un espace physique, de dimension n et où les variables seront notées x, et elle vérifie une équation de la forme $U' + AU = F$ où la notation "$'$" désigne la dérivation en temps, (U dépend donc des variables x et du temps t), F une donnée correspondant à un apport extérieur et A un opérateur ou une matrice d'opérateurs différentiels des variables d'espaces. A cela s'ajouteraient une donnée initiale $U(0,x) = U_0(x)$ et éventuellement des conditions aux limites sur le bord de l'ouvert $\mathcal{O}$ décrivant l'interaction du milieu $\mathcal{O}$ avec le milieu extérieur.

Nous allons parler ici d'une situation particulière simple correspondant aux cas où F est nulle et A est un opérateur linéaire.

Le cas le plus simple et le plus élémentaire est celui d'une équation différentielle ordinaire posée sur l'intervalle $]0,\infty[$

$$\text{(E1)} \qquad Y'(t) + k \cdot Y(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0, \qquad \text{avec } Y(0) = c$$

dont la solution est $Y(t) = (\exp(-kt)) \cdot c$, que nous pouvons ré-écrire sous la forme abstraite

$$\text{(1)} \qquad Y(t) = G(t) \cdot c$$

On notera alors deux points à savoir $G(0) \cdot c = c$ et $G(t+s)c = G(t)G(s) \cdot c$. On considérera alors dans la suite et pour $t > 0$, l'application $L : c \to G(t) \cdot c$, comme application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi que l'application $G : t \to G(t)$ comme application de $[0,\infty[$ à valeur dans l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Pour illustrer et éclairer un peu mieux ce processus, considérons plutôt un système différentiel linéaire de la forme $Y'(t) + MY(t) = 0$ pour $t > 0$ avec $Y(0) = Y_0$, avec cette fois M, une matrice carrée $n \times n$ et Y_0 un vecteur à n composantes réelles. Comme précédemment on peut écrire la solution sous la forme $Y(t) = (\exp(-tM))Y_0$ et on notera que $\exp(-tM)$, à t fixé est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même définie par la série usuelle de l'exponentielle qui est normalement convergente dans $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et sur tout compact en temps.

Si on se place à présent dans un espace de Banach ou de Hilbert E et si B est un opérateur linéaire continu, c'est-à-dire un élément de $L(E)$, on résout de manière tout à fait similaire le problème de Cauchy $U' + BU = 0$ avec $U(0) = U_0$, U étant alors une fonction de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans E, grâce au fait que l'application $G(t) = \exp(-tB)$ pour $t > 0$ donné, est bien définie.

La difficulté apparait lorsque l'on s'intéresse à un problème de Cauchy, de la forme $U' + AU = 0$ avec A un opérateur non borné, car la définition de $\exp(-tA)$ n'est alors plus aussi évidente.

C'est à cette situation que nous nous intéresserons dans cet exposé. Il sera composé de trois parties. Dans la première nous partirons d'un semi-groupe $G(t)$ et nous nous intéresserons aux cas où il peut être vu, dans un certain sens, comme "l'exponentielle" d'un opérateur A, appelé son générateur. Nous insisterons sur la notion de continuité forte qui implique de nombreuses propriétés du semi-groupe.

Dans la seconde on partira d'un opérateur non borné A et on donnera des conditions suffisantes pour qu'il soit le générateur d'un semi-groupe $G(t)$.

La troisième partie sera consacrée à quelques exemples d'applications et à des extensions. On y discutera entre autres des semi-groupes de contraction et du cas où le semi-groupe est en fait un groupe.

Remarque : Cet exposé se veut élémentaire et est destiné à donner aux doctorants qui travaillent dans d'autres domaines que l'analyse des équations aux dérivées partielles une idée sur un des outils bien connu dans la résolution de problèmes d'évolution et qui, par ailleurs, a des ramifications dans d'autres sous disciplines des mathématiques.

Bibliographie principale :

1. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer - Verlag, 1983.

2. K. Engel and R. Nagel, *Short course on semigroups*. Springer, 2010.

Bibliographie secondaire :

1. M.G. Crandall and A. Pazy , Semi-Groups of Nonlinear Contractions and Dissipative Sets. *Journal of Functional Analysis* 3, (1969) pp. 376-418.

2. H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Mathematics Studies, 5, 1973.

3. M.G. Crandall and T.M. Liggett, Generation of Semi-Groups of Nonlinear Transformations on General Banach Spaces. *American Journal of Mathematics* Vol. 93, No. 2 (Apr., 1971), pp. 265-298.

La convergence faible et son utilisation : points forts et points faibles

François Murat

Laboratoire Jacques-Louis Lions

Université Pierre et Marie Curie Paris VI - France

Dans cet exposé destiné à des doctorants de toutes les branches des mathématiques, je m'efforcerai d'être très élémentaire. En contrepartie, ce que je vais exposer sera bien connu (ou devrait être bien connu) des doctorants préparant une thèse en edp (équations aux dérivées partielles) ou en analyse fonctionnelle ; j'espère que ces derniers trouveront quand même un certain intérêt à cet exposé.

1. Rappels d'analyse fonctionnelle : définition de la convergence faible

Par définition, V est un **espace de Banach** si V est un espace vectoriel muni d'une norme notée $\|\,.\,\|_V$ pour laquelle l'espace est complet. Si V est un espace de Banach, on désigne par V' le **dual** de V, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur V (en d'autres termes $V' = \mathcal{L}(V;\mathbf{R})$) muni de la norme

$$\|v'\|_{V'} = \sup_{v\in V,\, v\neq 0} \frac{\langle v', v\rangle_{V',V}}{\|v\|_V},$$

qui en fait un espace de Banach.

Nous pouvons maintenant définir la convergence faible d'une suite de V :

Définition de la convergence faible d'une suite. *Soit V un espace de Banach. Une suite v_n de V converge faiblement dans V vers v si $v_n \in V$ et $v \in V$ et si, pour tout $v' \in V'$, on a*

$$\langle v', v_n\rangle_{V',V} \to \langle v', v\rangle_{V',V} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

ce que l'on désigne par la notation (avec une demi flèche $\rightharpoonup$)

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{dans } V \text{ faible} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

De cette définition on déduit immédiatement que si une suite v_n de V converge fortement dans V vers v (c'est à dire converge en norme, et on emploie le terme de **convergence forte** et la notation avec une flèche entière $\to$ pour distinguer cette convergence de la convergence faible), alors la suite v_n converge faiblement dans V vers v. Quand la dimension de V est infinie, la réciproque est en général fausse, comme on le verra par un contre exemple au paragraphe 3 ci-dessous.

La convergence faible est donc plus faible que la convergence forte.

Pour terminer ce paragraphe, énonçons un **résultat fondamental de compacité**, qui fait tout l'intérêt de la convergence faible : quand V est un espace de Banach **réflexif**, c'est à dire quand son bidual V'' (le dual de son dual V') coïncide avec V pour l'injection canonique de V dans V'', le théorème de Banach Alaoglu Bourbaki affirme que les bornés de V sont relativement faibement compacts ; on en déduit le :

Théorème. *Soit V un espace de Banach réflexif. De toute suite v_n bornée dans V on peut extraire une sous suite $v_{n'}$ pour laquelle il existe un $v \in V$ (qui dépend de la sous suite) tel que la sous suite $v_{n'}$ converge faiblement dans V vers v quand n' tend vers l'infini.*

Cette propriété de compacité est un point très fort de la convergence faible.

2. Une application de la convergence faible : le cas linéaire

La convergence faible "se marie bien" avec la linéarité. C'est là l'autre point fort de la convergence faible.

En effet **la convergence faible commute avec l'application d'un opérateur linéaire continu** : soient V et W deux espaces de Banach réflexifs, soit B un opérateur linéaire continu de V dans W, i.e. $B \in \mathcal{L}(V;W)$, et soit v_n une suite de V qui converge faiblement dans V vers v ; alors la suite $B\,v_n$ de W converge faiblement dans W vers $B\,v$; pour montrer ce résultat il suffit d'utiliser la définition de l'opérateur transposé ${}^tB \in \mathcal{L}(W';V')$ et d'écrire pour tout $w' \in W'$

$$\langle w', B\,v_n\rangle_{W',W} = \langle {}^tB\,w', v_n\rangle_{V',V} \to \langle {}^tB\,w', v\rangle_{V',V} = \langle w', B\,v\rangle_{W',W} \quad \text{quand } \ n \to +\infty.$$

Voici maintenant **une application de la convergence faible au passage à la limite dans un problème linéaire**.

Soit V un espace de Banach réflexif, soient f_n une suite de V' et $f \in V'$ tels que

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{dans } \ V' \ \text{ faible} \quad \text{quand } \ n \to +\infty,$$

et soit A un opérateur linéaire continu de V dans V', i.e. $A \in \mathcal{L}(V;V')$, qui de plus est **coercif**, c'est à dire pour lequel on a

$$\langle A\,v, v\rangle_{V',V} \geq \alpha\,\|v\|_V^2 \quad \text{pour tout } \ v \in V,$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. (Dans la pratique, A sera un opérateur aux dérivées partielles elliptique, et V sera un espace de Sobolev.)

Supposons en outre que pour chaque n il existe un u_n tel que

$$u_n \in V, \quad \langle A\,u_n, v\rangle_{V',V} = \langle f_n, v\rangle_{V',V} \quad \text{pour tout } \ v \in V.$$

Nous ne montrerons pas ici qu'il existe un tel u_n (cette existence est une conséquence du lemme de Lax Milgram), mais montrons que si un tel u_n existe, il est unique : en effet s'il existe une autre solution y_n qui vérifie aussi

$$y_n \in V, \quad \langle A\,y_n, v\rangle_{V',V} = \langle f_n, v\rangle_{V',V} \quad \text{pour tout } \ v \in V,$$

en faisant la différence des deux équations et en prenant $v = u_n - y_n$, qui appartient à V, il vient, en raison de la linéarité de l'opérateur A,

$$\langle A\,(u_n - y_n), (u_n - y_n)\rangle_{V',V} = 0,$$

ce qui, en utilisant la coercivité de l'opérateur A, implique que $u_n - y_n = 0$, c'est à dire l'unicité.

Passons maintenant à la limite dans l'équation de définition de u_n.

En prenant $v = u_n$ dans cette équation et en utilisant à nouveau la coercivité et la définition de la norme de V', on obtient

$$\alpha\,\|u_n\|_V^2 \leq \langle A\,u_n, u_n\rangle_{V',V} = \langle f_n, u_n\rangle_{V',V} \leq \|f_n\|_{V'}\,\|u_n\|_V,$$

ce qui implique que

$$\|u_n\|_V \leq \frac{\|f_n\|_{V'}}{\alpha}.$$

Le théorème de Banach Steinhaus affirme que si une suite f_n de V' converge faiblement dans V' vers f, alors la norme $\|f_n\|_{V'}$ est bornée indépendamment de n. La norme $\|u_n\|_V$ est donc bornée indépendamment de n. Le théorème énoncé à la fin du paragraphe 1 nous permet alors d'extraire une sous suite $u_{n'}$ pour laquelle il existe un $u \in V$ tel que la sous suite $u_{n'}$ converge faiblement dans V vers u quand n' tend vers l'infini. Il est maintenant facile de passer à la limite dans l'équation de définition de $u_{n'}$ quand n' tend vers l'infini et d'obtenir que u est solution de

$$u \in V, \quad \langle A\, u, v \rangle_{V',V} = \langle f, v \rangle_{V',V} \quad \text{pour tout } \ v \in V.$$

Notons que, comme c'était le cas pour l'équation de définition de u_n, cette équation limite a une solution unique u, et ce quelle que soit la sous suite extraite. Par le lemme dit "de l'unicité de la limite", cela implique que toute la suite u_n converge faiblement dans V vers ce u sans qu'il soit besoin d'extraire de sous suite.

L'équation de définition de u_n est donc stable par passage à la limite faible quand le second membre f_n converge faiblement dans V'.

On peut en outre démontrer facilement, en utilisant à nouveau la linéarité et la coercivité, que si en outre

$$f_n \to f \quad \text{dans } \ V' \text{ fort} \quad \text{quand } \ n \to +\infty,$$

alors

$$u_n \to u \quad \text{dans } \ V \text{ fort} \quad \text{quand } \ n \to +\infty.$$

La vie est donc belle grâce à la convergence faible quand on a affaire à des problèmes linéaires.

3. Convergence faible et non linéarité : les choses se compliquent...

Les choses se compliquent quand on a affaire à des problèmes non linéaires, comme le montre l'exemple suivant, qui est **l'archétype des suites de fonctions qui convergent faiblement mais pas fortement dans L^2**.

Dans cet exemple, l'espace V sera l'espace $L^2(0,1)$ des fonctions de carré intégrable, qui, muni de la norme définie par $\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |v(s)|^2 ds$, est un espace de Banach. Pour deux nombres réels donnés a et b tels que $a \neq b$, et pour un nombre réel donné θ tel que $0 < \theta < 1$, on définit pour chaque n la fonction z_n de la façon suivante : pour $k = 0, 1, ..., n-1$, on pose

$$z_n(x) = a \ \text{ si } \ \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+\theta}{n}, \qquad z_n(x) = b \ \text{ si } \ \frac{k+\theta}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}\,;$$

ces fonctions z_n oscillent périodiquement (avec la période $1/n$, qui dépend de n) entre les valeurs a et b avec les proportions θ et $(1-\theta)$.

Montrons que

$$z_n \rightharpoonup z = \theta\, a + (1-\theta)\, b \quad \text{dans } \ L^2(0,1) \ \text{ faible} \quad \text{quand } \ n \to +\infty.$$

La première étape consiste à montrer que, pour tout x et tout y avec $0 \leq x < y \leq 1$,

$$\int_x^y z_n(s)\,ds \to (\theta\, a + (1-\theta)\, b)(y-x) = \int_x^y z(s)\,ds \quad \text{quand} \;\; n \to +\infty\,;$$

pour cela on décompose l'intégrale $\displaystyle\int_x^y z_n(s)\,ds$ sur le segment $[x,y]$, de longueur $y-x$, en une somme d'intégrales sur les petits segments $[k/n,(k+1)/n]$; ces intégrales, toutes égales sauf peut être celles situées aux deux extrémités x et y, valent chacune $(\theta\, a+(1-\theta)\, b)/n$, et comme la longueur de chaque petit segment est $1/n$, leur nombre est environ $n\,(y-x)$; d'où le résultat.

La deuxième étape consiste à observer que les fonctions étagées ψ (sommes finies de fonctions caractéristiques d'intervalles multipliées par des constantes) sont denses dans $V' = L^2(0,1)$, puis à écrire, pour tout $Z \in V'$,

$$\int_0^1 Z(s)\, z_n(s)\,ds = \int_0^1 \psi(s)\, z_n(s)\,ds + \int_0^1 (Z(s)-\psi(s))\, z_n(s)\,ds\,;$$

grâce à la première étape, on passe à la limite dans le premier terme du deuxième membre pour ψ fixé quand n dans vers l'infini, ce qui donne $\displaystyle\int_0^1 \psi(s)\, z(s)\,ds$, que l'on écrit sous la forme

$$\int_0^1 Z(s)\, z(s)\,ds + \int_0^1 (\psi(s)-Z(s))\, z(s)\,ds\,;$$

il ne reste plus qu'à remarquer que la dernière intégrale est petite si $(\psi - Z)$ est petit dans $L^2(0,1)$, et que, sous cette même hypothèse, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (Z(s)-\psi(s))\, z_n(s)\,ds$ (que nous avions oubliée 7 lignes ci dessus) est également petite, uniformément en n, puisque les fonctions z_n sont uniformément bornées par $\max(a,b)$. La démonstration est ainsi terminée.

Notons que les fonctions z_n oscillent de plus en plus rapidement en ne prenant que les deux valeurs a et b, alors que leur limite faible $z = \theta\, a + (1-\theta)\, b$ ne prend jamais ni l'une ni l'autre de ces valeurs. Notons aussi que les fonctions z_n ne convergent pas fortement vers z (ni d'ailleurs vers aucune autre fonction).

Si on se donne maintenant une fonction S continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, les fonctions $S(z_n)$, comme les fonctions z_n, oscillent périodiquement avec la période $1/n$ et avec les proportions θ et $(1-\theta)$, mais maintenant entre les valeurs $S(a)$ et $S(b)$; on déduit du résutat précédent que

$$S(z_n) \rightharpoonup \theta\, S(a) + (1-\theta)\, S(b) \quad \text{dans} \;\; L^2(0,1) \;\; \text{faible} \quad \text{quand} \;\; n \to +\infty\,;$$

en général la limite faible de $S(z_n)$, i.e. $\theta\, S(a) + (1-\theta)\, S(b)$, n'est donc pas égale à $S(z) = S(\theta\, a+(1-\theta)\, b)$ (si tel était le cas pour tout θ pour a et b donnés, cela impliquerait que la fonction S est affine sur le segment $[a,b]$). **L'application $z \to S(z)$ n'est donc pas continue de L^2 faible dans L^2 faible dès que la fonction S n'est pas affine**.

Convergence faible et non linéarité ne font donc pas bon ménage. C'est le principal point faible de la convergence faible, et la difficulté majeure que l'on rencontre dans l'étude de la stabilité des solutions des équations non linéaires. De très nombreux travaux sont consacrés à la résolution de cette difficulté, mais ceci est une autre histoire....

Quelques références

Ce qui est présenté dans les paragraphes 1 et 2 ci-dessus est exposé dans tous les (bons) livres d'analyse fonctionnelle, qui sont nombreux, par exemple dans le livre

H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris, 1983

ou dans sa version anglaise (plus récente et plus complète)

H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, New York, 2011

Pour continuer sur ce qui est présenté dans le paragraphe 3, on pourra consulter par exemple

L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*. In *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt symposium Volume IV*, edited by R.J. Knops, Research Notes in Mathematics 39, Pitman, London, 1979

Control and identification problems for distributed systems with memory

Luciano Pandolfi

Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

Politecnico di Torino, Torino - Italy

The wave and heat equations

$$\theta' = \Delta\theta \tag{1}$$

$$u'' = \Delta w \tag{2}$$

(Δ is the laplacian in a region Ω) have been considered in control theory at least in the last fifty years. See [20] for the early study of control problems for these classes of systems. As it is known, Eq. (1) describe diffusion processes, like diffusion of heat and diffusion of solutes in solvents, while Eq. (2) describes the propagation of waves for example in elastic media. We assume that a control f acts in the Dirichlet conditions and we impose

$$\theta(x,t) = f(x,t)\,, \qquad w(x,t) = f(x,t) \quad \text{if } x \in \partial\Omega.$$

The heat equation is a consequence of Fourier Law of heat transmission while the wave equation is a consequence of Hook law. respectively

$$q(x,t) = -\nabla\theta(x,t)\,, \qquad \sigma(x,t) = -\nabla u(x,t)$$

where q and σ are respectively the flux and the traction. Both these laws do not take into account that in certain cases the flux or traction at time t might be affected by the past history. If this fact is taken into account, and we confine ourselves to linear regimes, the previous laws are replaced by

$$q(x,t) = -\int_0^t N(t-s)\nabla\theta(x,s)ds\,, \qquad \sigma(x,t) = -\nabla u(x,t) - \int_0^t M(t-s)\nabla u(x,s)ds$$

and both these laws leads to a common model

$$w' = \int_0^t N(t-s)\Delta w(x,s)ds\,. \tag{3}$$

Model (3) was first introduced in thermodynamics by J.C. Maxwell in the special case $N(t) = be^{-at}$ (a, b positive), see [8]. For a general (smooth) *relaxation kernel* $N(t)$ with $N(0) > 0$ it was first introduced by M.E. Gurtin and A.G. Pipkin (see [6]) while in elesticity theory it goes back to L. Boltzman and V. Volterra (see [3, 4, 21]) (see [13] for an history of model (3) in thermodynamics).

The assumptions $N(t)$ smooth and $N(0) > 0$ imply finite propagation speed, equal to $\sqrt{N(0)}$.

In this talk we outline a recent approach to controllability. Controllability problems for Eq. (3) have been first studied is several papers by J. Baumeister and G. Leugering (see for example [2, 11, 12]), by J.U. Kim in [9] and later by J. Yong J. and X. Zhang (in [22]) and this author (see for example [14, 15]).

Finally we mention the facts that :

1) the ideas and results derived in the study of controllability have also been used to solve several inverse problems for viscoelastic systems, see [1, 16, 17, 18].

2) a different class of systems, introduced in thermodynamics by B.D. Colemann and M.E. Gurtin (see [5]), is described by

$$\theta' = \Delta\theta + \int_0^t K(t-s)\Delta\theta(s)ds\,.$$

The solutions of this equation have properties similar to those of the heat equation (i.e. the equation with $K = 0$) but the controllability properties are very different. In particular, il $K(t) \neq 0$, it is not possible to force any initial condition to hit $\theta(x,T) = 0$ at a certain time T, see [7].

Finally we cite the book [19] as an important reference for a general class of linear systems which contains the ones we mentioned and the book [10] which describes the derivation and properties of different models of viscoelastic materials.

Références

[1] S. Avdonin, L. Pandolfi, A linear algorithm for the identification of a weakly singular relaxation kernel using two boundary measurements, submitted, Arxiv 1609.07918

[2] Baumeister J., Boundary control of an integrodifferential equation, *J. Math. Anal. Appl.* **93** 550-570, 1983.

[3] L. Boltzmann, Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Wien. Ber. 70 (1874) 275-306.

[4] L. Boltzmann, Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Wied. Ann. 5 (1878) 430-432.

[5] B.D. Colemann and M.E. Gurtin, *Equipresence and constitutive equations for heat conductors*, Z. Angew. Math. Phys. **18** (1967), 199-208.

[6] Gurtin, M.E., Pipkin, A.G. : A general theory of heat conduction with finite wave speed. *Arch. Rational Mech. Anal.* **31**, 113-126 (1968)

[7] A. Halanay, L. Pandolfi, Approximate controllability and lack of controllability to zero ofthe heat equation with memory, J. Math. Analysis Appl., **425** 194-211, 2015.

[8] Maxwell, J.C. On the dynamical theory of gases, *Phil. Trans., Roy. Soc. London,* **157** 49-88, 1867,

[9] Kim, J.U. : Control of a second-order integro-differential equation. *SIAM J. Control Optim.* **31**, 101-110 (1993)

[10] Kolski, H., *Stress waves in solids,* Clarendon Press, Oxford. 1953.

[11] Leugering, G. : Exact controllability in viscoelasticity of fading memory type. *Appl. Anal.* **18**, 221-243 (1984)

[12] Leugering, G. : On boundary controllability of viscoelastic systems. In *Control of partial differential equations* Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 114, Springer, Berlin 190-220 (1989)

[13] D.D. Joseph and L. Preziosi, *Heat waves,* Rev. Modern Phys. **61** (1989), 41–73; *Addendum to the paper : "Heat waves". Rev. Modern Phys.* **62** (1990), 375–391.

[14] Pandolfi, L., *Distributed systems with persistent memory. Control and moment problems.* Springer Briefs in Electrical and Computer Engineering. Control, Automation and Robotics. Springer, Cham, 2014.

[15] L. Pandolfi : Controllability of isotropic viscoelastic bodies of Maxwell-Boltzmann type, in print, ESAIM Control Calc. Variations, preview in https ://doi.org/10.1051/cocv/2016068

[16] Pandolfi, L., *A linear algorithm for the identification of a relaxation kernel using two boundary measures,* Inverse Problems 31 (2015), no. 10, 105003, 12 pp.

[17] Pandolfi, L., *Identification of the relaxation kernel in diffusion processes and viscoelasticity with memory via deconvolution,* Math. Methods Appl. Sci., DOI : 10.1002/mma.4180

[18] Pandolfi, L. Dynamical identification of a space varying coefficient in a system with persistent memory, submitted

[19] Prüss, J. : *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Monograph in Mathematics 87, Birkhäuser, Basel (1993)

[20] Russell, D.L., Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : Recent progress and open questions, *SIAM Rev.* **20** 639-739, 1978.

[21] Volterra, V., Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, s. V, vol. XVIII 1909 , pp. 295-301.

[22] Yong J., Zhang, X. : Exact controllability of the heat equation with hyperbolic memory kernel. in *Control of Partial Differential Equations*, Lect. Notes Pure Appl. Math. 242, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL 387-401 (2005)

Le processus de rafle de J. J. Moreau

(Moreau's sweeping process)

Paul Raynaud de Fitte

Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem (LMRS)

Université de Rouen - France

Le processus de rafle (sweeping process) a été inventé par Jean-Jacques Moreau dans les années 1970 pour résoudre des problèmes d'élastoplasticité. Depuis, il a été très étudié et a trouvé beaucoup d'autres applications, jusqu'à la modélisation des mouvements de foule.

Ce processus comporte deux ingrédients : d'une part, un ensemble mobile $C(t)$, qui peut se déformer lorsque t varie, mais que l'on suppose en général à valeurs convexes, d'autre part un point $x(t)$ que l'on oblige à rester dans $C(t)$. La version la plus simple s'écrit

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)). \tag{1}$$

Ici, $\dot{x}(t)$ représente la dérivée en un certain sens de x, et $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal à $C(t)$ au point $x(t)$, il représente l'ensemble des directions qui sortent "perpendiculairement" à C lorsque x est sur le bord de C. Le signe $-$ indique que la dérivée de x pointe vers l'interieur relatif de C et empêche x de sortir. Plus précisément, si C est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ (ou d'un espace de Hilbert)

$$N_C(x) := \{u \in \mathbb{R}^n;\ (\forall y \in C)\ \langle u, y - x\rangle \leq 0\} \quad (x \in C)$$

avec la convention que $N_C(x) = \emptyset$ si $x \notin C$. La figure 1 illustre les cas où le bord de C est lisse et celui où il est anguleux.

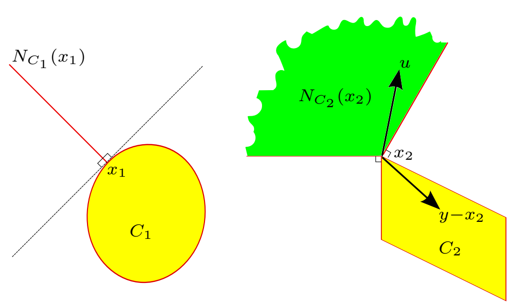


Figure 1: Cône normal

La définition du cône normal implique que $N_C(x) = \{0\}$ si x est dans l'intérieur relatif de C. Dans l'équation (1), cela veut dire que x reste immobile tant que le bord de C ne le touche pas, comme le montre la figure 2.

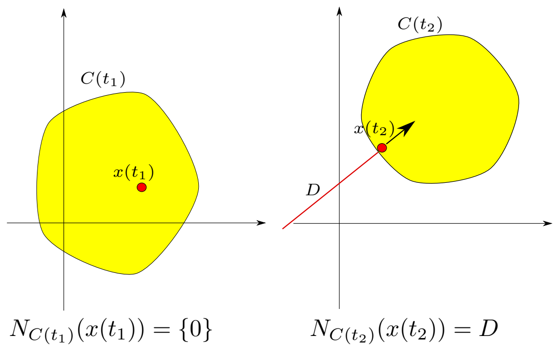


Figure 2: Processus de rafle

Il existe beaucoup de variantes du processus de rafle. Par exemple, le processus de rafle perturbé est défini par une équation de la forme

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + f(t, x(t)), \tag{2}$$

pour une fonction f donnée, qui représente la perturbation. Dans ce cas, lorsque x n'est pas sur le bord de C, son mouvement est régi par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)). \tag{3}$$

On peut montrer l'existence et l'unicité de la solution x de (2) sous des conditions assez générales sur C et f. Ce problème de rafle perturbée est équivalent à une variante d'un autre problème, inventé par Anatoliy V. Skorokhod dans les années 1960 dans le cadre des processus stochastiques, et connu sous le nom de “problème de réflexion de Skorokhod”. En fait, le problème (2) équivaut au problème de réflexion de Skorokhod avec frontière mobile, et la formulation de Skorokhod est utile pour formuler et résoudre des problèmes de rafle dans lesquels l'équation (3) est remplacée par une équation plus compliquée comme une équation différentielle stochastique.

Dans cet exposé, je montrerai comment on peut résoudre le problème de la rafle perturbée, et j'aborderai l'application de ce problème à la modélisation des mouvements de foule.

Références

[1] F. Bernicot et J. Venel : Stochastic perturbation of sweeping process and a convergence result for an associated numerical scheme. *J. Differential Equations*, 251(4-5):1195–1224, 2011.

[2] Markus Kunze et Manuel D. P. Monteiro Marques : An introduction to Moreau's sweeping process. *In Impacts in mechanical systems (Grenoble, 1999)*, volume 551 de *Lecture Notes in Phys.*, pages 1–60. Springer, Berlin, 2000.

[3] Bertrand Maury, Aude Roudneff-Chupin, Filippo Santambrogio et Juliette Venel : Handling congestion in crowd motion modeling. *Netw. Heterog. Media*, 6(3):485–519, 2011.

[4] Manuel D. P. Monteiro Marques : *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 9. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993. Shocks and dry friction.

[5] J.-J. Moreau : Rafle par un convexe variable. I. *In Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. I, Exp. No. 15*, pages 43 pp. Secrétariat des Math., Publ. No. 118. U.É.R. de Math., Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1971.

[6] J.-J. Moreau : Rafle par un convexe variable. II. *In Travaux du Séminaire d'Analyse Convexe, Vol. II, Exp. No. 3*, pages 36 pp. Secrétariat des Math., Publ. No. 122. U.É.R. de Math., Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1972.

[7] J.-J. Moreau : Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Differential Equations*, 26(3):347–374, 1977.

[8] A. V. Skorohod : Stochastic equations for diffusion processes with a boundary. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 6:287–298, 1961.

Fast Fourier solvers for discretizations of the basic mathematical physics equations

Alexander Zlotnik

Department of Mathematics at Faculty of Economic Sciences
National Reseach University, Higher School of Economics
Moscou - Russie
azlotnik@hse.ru

Finite-difference schemes (FDS) and finite element methods (FEM) are considered for solving the basic partial differential equations in mathematical physics such as the Poisson equation, the heat equation, the wave equation and the time-dependent Schrödinger equation, in rectangular domains. We begin with the standard five-point FDS and the bilinear FEM for the Poisson **equation in a rectangle with the zero Dirichlet boundary condition and write down the simple and double Fourier expansions with respect to sines for their solutions. Then we show how they can be used in a logarithmically optimal direct algebraic methods to implement these FDS and FEM using the discrete Fast Fourier Transform (FFT) ; its main idea is also recalled. The cases of other boundary conditions, more general elliptic equations and 3D case are discussed as well.

Next the spatial FDS and FEM discretizations are combined with implicit discretizations in time for the heat equation (a two-level scheme with a weight), the wave equation (a three-level scheme with a weight) and the time-dependent Schrödinger equation (the two-level symmetric scheme). The fast implementation of these full discretizations at each time level is reduced to the above methods applied to a slightly generalized Poisson equation.

The main part of the talk is devoted to a quite new (2017 year) generalization of such Fourier-based approaches to a *high-order* in space FEM on rectangular elements for multidimensional versions of the mentioned equations. Namely, we present direct fast algorithms to implement nth order ($n \geq 2$) finite element method (FEM) on rectangular parallelepipeds for solving the N-dimensional generalized Poisson equation $-\Delta u+\alpha u = f$ ($N \geq 2$) with the Dirichlet boundary condition.

The key new points are a detailed description for the eigenpairs of the 1D eigenvalue problems for the high order FEM as well as the fast direct and inverse algorithms for expansion in the eigenvectors utilizing simultaneously several versions of FFT. This solves the old known problem and makes the full algorithms logarithmically optimal with respect to the number of elements as in the case of the standard finite-difference schemes or bilinear elements ($n = 1$).

Notice that the constant α can be real of any sign or even complex so that the operator $-\Delta + \alpha$ can be indefinite and non-self-adojoint (in contrast to some standard iterative methods).

The algorithms are fast in practice as the number of elements K grows (even faster than the naive theoretical expectations due to the vector data processing in usual modern CPUs) and demonstrate only a mild growth in n starting from the original case $n = 1$.

For example, in the 9th order case, the 2D FEM system for $K = 2^{20}$ elements containing almost $85 \cdot 10^6$ unknowns and the 3D FEM system for $K = 2^{18}$ elements containing more than $190 \cdot 10^6$ unknowns are solved respectively in less than 2 and 15 min on an ordinary laptop using Matlab R2016a code.

The algorithms can further serve for a variety of applications including general 2nd order elliptic equations (as preconditioners), for the N-dimensional heat, wave or time-dependent Schrödinger equations (since α can be complex), etc. In combination with other methods, they can be applied for some non-rectangular domains and non-uniform meshes, in particular, by involving meshes topologically equivalent to rectangular uniform ones. Other standard boundary conditions can be covered as well. Clearly the algorithms are easily parallelizable so that they are useful in scientific computing.

We also emphasize that the Fourier structure of algorithms is especially valuable for solving some wave physics problems, in particular, for classical or quantum waveguides and/or involving non-local boundary conditions.

Results of numerical experiments for $N = 2$ and 3 are presented in detail including h-p version of FEM error analysis ; all of them include the original case $n = 1$ for comparison.

Références

[1] Y.M. Altman, Accelerating MATLAB Performance : 1001 Tips to Speed up MATLAB Programs, Chapman and Hall/CRC, 2014.

[2] B. Bialecki, G. Fairweather, A. Karageorghis, Matrix decomposition algorithms for elliptic boundary value problems : a survey, Numer. Algor. 56 (2011) 253–295.

[3] V. Britanak, K.R. Rao, P. Yip, Discrete cosine and sine transforms : general properties, fast algorithms and integer approximations. Oxford : Academic Press – Elsevier, 2007.

[4] P.G. Ciarlet, Finite Element Method for Elliptic Problems, SIAM, Philadelphia, 2002.

[5] K. Du, G. Fairweather, Q.N. Nguyen, W. Sun, Matrix decomposition algorithms for the C^0-quadratic finite element Galerkin method, BIT Numer. Math. 49 (2009) 509–526.

[6] B. Ducomet, A. Zlotnik, I. Zlotnik, The splitting in potential Crank-Nicolson scheme with discrete transparent boundary conditions for the Schrödinger equation on a semi-infinite strip, ESAIM : Math. Model. Numer. Anal., 48 :6 (2014), 1681-1699.

[7] E.G. Dyakonov, Optimization in Solving Elliptic Problems, CRC Press, Boca Raton, 1996.

[8] M. Frigo, S.G. Johnson, The design and implementation of FFTW3, Proc. IEEE 93 (2005) 216-231.

[9] A.A. Samarskii, E.S. Nikolaev, Numerical Methods for Grid Equations, Vol. I, Direct methods, Birkhäuser, 1989.

[10] P.N. Swarztrauber, The methods of cyclic reduction, Fourier analysis and the FACR algorithm for the discrete solution of Poisson's equation on a rectangle, SIAM Review 19 :3 (1977) 490–501.

[11] A. Zlotnik, I. Zlotnik, Finite element method with discrete transparent boundary conditions for the time-dependent 1D Schrödinger equation, Kinetic Relat. Models 5 :3 (2012), 639–667.

[12] A.A. Zlotnik, I.A. Zlotnik, A fast direct algorithm for implementing a high-order finite element method on rectangles as applied to boundary value problems for the Poisson equation, Dokl. Math. 95 :2 (2017), 129–135.

[13] A. Zlotnik, I. Zlotnik, On fast Fourier solvers for the tensor product high-order FEM for a generalized Poisson equation `https://arxiv.org/abs/1701.03967`

Autour de l'hyperdéterminant

Hacène Belbachir

Laboratoire RECITS - Faculté de Mathématiques

USTHB - Alger - Algérie

Le concept d'hyperdéterminant a été introduit par Cayley au milieu du $19^{ième}$ siècle comme une extension du déterminant classique opérant sur les tenseurs (hypercubes et hypergrilles),

$$M = (M_{i_1,i_2,\ldots,i_k})_{1\leq i_1,i_2,\ldots,i_k\leq n}\,.$$

Il a proposé plusieurs généralisations, principalement citées dans les articles :
- On the theory of determinants (1843) ;
- Mémoires sur les hyperdeterminants (1846) ;
- On the theory of permutants (1851) ;

La généralisation la plus simple a été pratiquement abandonnée. La dernière référence répandue qui en parle est celle de Muir, dans son livre sur la théorie des déterminants. Il leur réserve un chapitre intitulé "Determinants of higher class". Il existe aussi une référence, moins répandue, de Sokolov (en russe) : Introduction to the theory of multidimensional matrices (1972).

L'hyperdéterminant est défini comme étant le polynôme invariant d'un tenseur d'ordre pair ($2k$)-ayant un nombre pair d'indices- défini sur un espace vectoriel de dimension n,

$$\det\left(M_{i_1,i_2,\ldots,i_{2k}}\right)_1^n = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_{2k}\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma_1\cdots\sigma_{2k})\prod_{i=1}^{n}M_{\sigma_1(i)\cdots\sigma_{2k}(i)}.$$

(Trivialement ce déterminant vaut zéro si le tenseur M est d'ordre impair).

Ces hyperdéterminants permettent l'évaluation de certaines intégrales multiples comme celles de Selberg et d'Aomoto :

$$S_n(a,b;\gamma) = \int_0^1\cdots\int_0^1 |\Delta(x)|^{2\gamma}\prod_{i=1}^{n}x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1}dx_1\cdots dx_n,$$

$$A_n^{a,b;k}(y) = \int_0^1\cdots\int_0^1 |\Delta(x)|^{2k}\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1}dx_1\cdots dx_n,$$

où

$$\Delta(x) = \det(x_i^{j-1}) = \prod_{i<j}(x_j-x_i),$$

et récemment, une application aux polynômes de Jack [1].

Nous présenterons aussi une approche qui prend en considération un nombre impaire d'indices, sachant qu'il ne donne pas un invariant, en fait ça engendre un groupe d'invariant. Comme motivation, on présente une interprétation géométrique de la loi de Gauss [7, 1801] relativement aux formes quadratiques, récemment découverte par M. Bhargava

[2, 2001] et [3, 2004], déjà pressenti par D. Shanks [15, 1989], et tout dernièrement étudié et appliqué à la cryptographie par O. Orcière [14, 2006].

Nous donnerons aussi un analogue de l'inégalité de Gram pour les espaces L^{2k} $(k \geq 1)$,ainsi qu'une généralisation de l'identité de Lagrange.

Références

[1] H. Belbachir, A. Boussicault, J.-G. Luque. Hankel hyperdeterminants, rectangular Jack polynomials and even powers of the Vandermonde, J. Algebra, 320 (2008), 3911–3925.

[2] M. Bhargava, Higher Composition Laws, Ph.D. Thesis, Princeton University, (2001).

[3] M. Bhargava, Higher composition laws I : A new view on Gauss composition and quadratic generalizations, Ann. of Math. 159 (2004), no. 1, 217–250.

[4] A. Cayley, *On the theory of determinants*, *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, 8, (1843) 1–16.

[5] A. Cayley, *Mémoire sur les hyperdéterminants*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 30, (1846) 1–37.

[6] A. Cayley, *On the theory of permutants*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 7, (1851) 40–51.

[7] C. F. Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, (1801).

[8] F. Gherardelli, *Remarks on hyperdeterminants* (Italian), Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A 127 (1993), no. 1, (1994) 107–113.

[9] P. Haukkanen, *Higher-dimensional GCD matrices*, Linear Algebra and its Applications **170** (1992), 53–63.

[10] J.-G. Luque, *Hyperdeterminants on semilattices*, à paraître dans Linear and Multilinear Algebra, (2007).

[11] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *Pfaffian and Hafnian identities in shuffle algebra*, Advances in Applied Mathematics 29, 620-646, (2002).

[12] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals*, J. Phys. A, Math. Gen., **36**, (2003) 5267.

[13] J.-G. Luque, J.-Y. Thibon, *Hyperdeterminantal calculations of Selberg's and Aomoto's integrals*, Molecular Physics, 10-20 June (2004), Vol. 102, No 11-12, 1351-1359.

[14] O. Orcière, Class group in cryptography, Thèse de Doctorat, Toulouse, (2006).

[15] D. Shanks, On Gauss and composition I and II, Number Theory Applications, (1989).

[16] N. P. Sokolov, *Spatial matrices and their applications* (in Russian), Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscow, (1960).

[17] N. P. Sokolov, *Introduction to the theory of multidimensional matrices* (in Russian), Nukova Dumka, Kiev, (1972).

Quantification par déformation et groupes quantiques

Philippe Bonneau

Université de Lorraine - France

1. Contexte

Les groupes quantiques, structures apparues sous diverses formes dans les années 1980 (cf [ChPr95] pour un bon exposé des différentes approches), peuvent être vus comme des objets permettant de généraliser les notions de symétries utilisées couramment en physique.

Leur étude a connu de très larges développements, se diffusant dans des domaines très divers des mathématiques. Le domaine principal, ici, est la quantification par déformation [BFFLS78] mais ces travaux permettent aussi de s'inscrire dans le domaine de la géométrie non commutative (notamment via les groupes quantiques localement compacts [KVVvDW01]).

2. Approche des groupes quantiques par la quantification par déformation

Dans les groupes quantiques, et en particulier dans leur construction via la quantification par déformation (voir par exemple [BFGP94]), on peut distinguer deux approches : l'approche formelle et l'approche convergente. Dans les deux travaux dont il sera question ici, [BBD17, BBDG17], on construit de nouveaux exemples de groupes quantiques dans le cadre de chacune des deux approches, en se basant sur un même schéma général. Ce schéma provient de formules de déformations sur une classe de groupes de Lie symplectiques précédemment développées dans l'article [BBM03]. Partant de ces formules nous obtenons un twist, pouvant être interprété comme un 2-cocycle et conduisant à des structures explicites de groupes quantiques (non compacts) par déformation de tout élément de la classe des groupes de Lie Kahleriens.

1. Dans l'approche formelle [BBD17] ("à la Drinfeld" mais plus précisément dans le schéma défini, à partir de Drinfeld [Dri86], par Giaquinto et Zhang dans [GiZh98]), nous construisons explicitement un twist de Drinfeld engendrant automatiquement la structure.

   De plus on obtient des formules explicites de tous les éléments de structure et de la R-matrice. La formule explicite de l'antipode est encore en cours de vérification.
2. Dans le cadre convergent [BBDG17] (quantification par déformation stricte, à la Rieffel [Rie93]) un unitaire multiplicatif a été obtenu à partir du twist et donc une forme de groupe quantique localement compact au sens de Baaj-Skandalis-Woronowicz (cf [BaSk93, Wor96, SoWo07] et [KVVvDW01] pour une présentation générale de ces travaux).
3. Toujours dans le cadre convergent on aboutit à une construction explicite de groupes quantiques localement compacts au sens de Kustermann-Vaes [KuVa00] par plusieurs méthodes :

– en utilisant la théorie générale de De Commer [dCom11], Neshveyev et Tuset [NeTu14] puis avec Bielivasky et Gayral [BGNT16] l'obtiennent à partir du 2-cocycle cité ;
– dans [BBDG17] nous obtenons ce résultat par quantification par déformation (via les méthodes de Bieliavsky et Gayral dans [BiGa15]) et, comme dans le cas formel, avec des formules explicites des éléments de structure. Nous montrons que ça coïncide bien avec l'exemple de [BGNT16].

3. Perspectives

Il serait intéressant de systématiser une méthode utilisée pour ces travaux : des correspondances dans les deux sens ont été utilisées tout du long entre l'aspect formel et l'aspect convergent :

– des formules explicites formelles ont pu être obtenues à partir de formules intégrales convergentes,
– des propriétés du modèle convergent ont été directement déduites de leurs preuves (très simples) formelles,
– et en définitive tout le développement a pu être fait selon les 2 aspects

Ainsi on peut chercher à développer un dictionnaire entre structures formelles et convergentes et une forme "automatique" de preuve, garantissant que si une preuve existe d'un coté, la même propriété sera immédiatement vérifiée de l'autre.

Ensuite ce dictionnaire pourra être utilisé pour obtenir d'autres exemples, tant du coté formel que du coté convergent.

Références

[BaSk93] S. Baaj and G. Skandalis, *Unitaires multiplicative et dualité pour les produits croisés de C^* algèbres*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **26** (1993), no. 4, 425 – 488.

[BFFLS78] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer. *Deformation theory and quantization I. Deformations of symplectic structures.* Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 61–110. *Deformation theory and quantization II. Physical applications.* Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 111–151.

[BBD17] P. Bieliavsky, P. Bonneau and F. D'Andrea, *Formal Kählerian Quantum Groups*, work in progress.

[BBDG17] P. Bieliavsky, P. Bonneau, F. D'Andrea and V. Gayral, *Quantum Kählerian Lie groups from multiplicative unitaries*, to be published in Journal of Non Commutative Geometry.

[BBM03] P. Bieliavsky, P. Bonneau and Y. Maeda, *Universal Deformation Formulae, Symplectic Lie groups and Symmetric Spaces*, Pacific J. Math. **230** (2007) 41–57.

[BiGa15] P. Bieliavsky and V. Gayral, *Deformation quantization for actions of Kählerian Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **236**, Number 1115, (2015).

[BGNT16] P. Bieliavsky, V. Gayral, S. Neshveyev and L. Tuset, *On deformations of C^*-algebras by actions of Kählerian Lie groups*, Internat. J. Math. **27** (2016), no. 3.

[BFGP94] P. Bonneau, M. Flato, M. Gerstenhaber and G. Pinczon, *The hidden group structure of quantum groups : strong duality, rigidity and preferred deformations*, Comm. Math. Phys. **161** (1994), no. 1, 125–156.

[ChPr95] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Corrected reprint of the 1994 original.

[dCom11] K. De Commer, *Galois objects and cocycle twisting for locally compact quantum groups*, J. Operator Theory **66** (2011), no. 1, 59 – 106.

[Dri86] V.G. Drinfel'd, *Quantum groups*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley (AMS, 1986) pp. 798–820.

[GiZh98] A. Giaquinto and J.J. Zhang, *Bialgebra actions, twists, and universal deformation formulas*. J. Pure Appl. Algebra **128** (1998), no. 2, 133–151.

[KuVa00] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **33** (2000), 837 – 934.

[KVVvDW01] J. Kustermans, S. Vaes, P. Vainerman, A. Van Daele and S. Woronowicz, *Locally compact quantum groups*, Lecture at School/Conference on Noncommutative Geometry and Quantum groups, Warsaw, 2001.
`https://perswww.kuleuven.be/ u0018768/artikels/lecture-notes.pdf`

[NeTu14] S. Neshveyev and L. Tuset, *Deformation of C^*-algebras by cocycles on locally compact quantum groups*, Adv. Math. **254** (2014), 454 – 496.

[Rie93] M.A. Rieffel, *Deformation quantization for actions of R^d*, Mem. Amer. Math. Soc. **106** (1993), no. 506.

[SoWo07] P.M. Soltan and S.L. Woronowicz, *From multiplicative unitaries to quantum groups II*, J. Funct. Anal. **252** (2007), 42 – 67.

[Wor96] S.L. Woronowicz, *From multiplicative unitaries to quantum groups*, Int. J. Math. **7** (1996), no. 1, 127 – 149.

Stabilité et stabilisation

Rachid Chabour
Université de Lorraine - France

Algèbres et algèbres de Hopf

Ilaria Damiani

Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" - Italie

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre associative unitaire.
Une représentation de A, ou A-module, est un K-espace vectoriel V avec un homomorphisme d'algèbres $\rho : A \to End_K(V)$ (voir [5], [18], [20]).

A est toujours un A-module (avec la multiplication gauche : $\rho(a)(b) = ab$), et la somme directe de deux A-modules V et W est naturellement un A-module ; si (V, ρ) est un A-module et $U \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel, la restriction ρ_U de ρ définie par $\rho_U(a) = \rho(a)\big|_U$ est une structure de A-module sur U si et seulement si U est A-stable, c'est-à-dire $\rho(a)(U) \subseteq U$ pour tout $a \in A$.

Question 1 : est-il vrai que si (V, ρ) est un A-module, le dual V^* a une structure "naturelle" de A-module ?

Question 2 : est-il vrai que si (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) sont A-modules, leur produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ a une structure "naturelle" de A-module ?

Proposition : Si A est une algèbre de Hopf, le dual et le produit tensoriel de A-modules sont A-modules : dans la théorie des représentations il est donc intéressant étudier quand une algèbre a une structure d'algèbre de Hopf.

Brièvement, une algèbre de Hopf est un espace vectoriel A avec la structure suivante (voir [1], [11], [12], [25]) :

i) A est une algèbre associative unitaire ;

ii) A^* est une algèbre associative unitaire (plus précisément A est une co-algèbre co-associative co-unitaire, voir [3] : en général A co-algèbre $\Rightarrow$ A^* algèbre ; en dimension finie les deux notions coïncident) ;

iii) les structures des points i) et ii) sont liées par un anti-homomorphisme, dit "antipode".

Si A est une algèbre de Hopf de dimension finie, son dual A^* est une algèbre de Hopf. A est commutative si et seulement si A^* est co-commutative.

Exemple 1 : Soit G un groupe.
Une représentation de G, ou G-module, est un K-espace vectoriel V avec un homomorphisme de groupes $\rho : G \to GL_K(V)$; ça correspond à une représentation de l'algèbre (associative unitaire) KG, l'espace vectoriel de base $\{e_g | g \in G\}$ et produit défini par $e_g e_{g'} = e_{gg'}$ pour tout $g, g' \in G$.

L'algèbre KG est une algèbre de Hopf co-commutative (KG est commutative si et seulement si G est abélien). La structure de G-modules sur le dual et sur le produit tensoriel de G-modules est celle induite de la structure d'algèbre de Hopf de KG (voir [23]).

Exemple 2 : Soient G un groupe algébrique et $K[G]$ l'algèbre (associative unitaire) des fonctions polynomiales de G à K. Le produit $G \times G \to G$, l'unité $\{1\} \to G$ et l'inverse $G \to G$ induisent homomorphismes/anti-homomorphismes

$$K[G] \to K[G] \otimes K[G], \quad K[G] \to K \quad \text{et} \quad K[G] \to K[G],$$

qui munissent $K[G]$ d'une structure d'algèbre de Hopf commutative ($K[G]$ est co-commutative si et seulement si G est abélien) : voir [2], [24].

Toute algèbre de Hopf commutative et finiment engendrée est l'algèbre des fonctions polynomiales sur un groupe algébrique. Si G est un groupe fini on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf $K[G] \cong (KG)^*$.

Exemple 3 : Soient L une algèbre de Lie et $L \hookrightarrow \mathcal{U}_L$ son algèbre enveloppante. Une représentation de L, ou L-module, est un K-espace vectoriel V avec un homomorphisme d'algèbres de Lie $\rho : L \to \mathfrak{gl}_K(V)$; ça correspond à une représentation de l'algèbre (associative unitaire) $\mathcal{U}_L$.

L'algèbre $\mathcal{U}_L$ est une algèbre de Hopf co-commutative ($\mathcal{U}_L$ est commutative si et seulement si L est commutative). La structure de L-modules sur le dual et sur le produit tensoriel de L-modules est celle induite de la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{U}_L$ (voir [4], [14]).

Exemple 4 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple (voir [14]) ou plus généralement une algèbre de Kac-Moody de type fini ou affine (voir [16]), et soit $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre quantique associée à $\mathfrak{g}$: $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ est une déformation (associative unitaire) de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}_\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ (v. [10], [15], [9], [17] ; voir aussi [6], [7] pour une comparaison entre [10] et [9]), et en particulier $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ est non-commutative ; de même on peut déformer la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{U}_\mathfrak{g}$: en conséquence $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ devient une algèbre de Hopf (qui n'est ni commutative ni co-commutative), et sa théorie des représentations est donc "tensorielle" (voir [19], [21], [22]).

Problème : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody de type affine, et soit $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre quantique associée à $\mathfrak{g}$: à côté de la structure d'algèbre de Hopf définie par Drinfeld, Jimbo, Lusztig, en 1986 Drinfeld a introduit un différent "coproduit" Δ, à valeurs dans une completion $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ du produit tensoriel $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$: Δ est un homomorphisme d'algèbres $\Delta : \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ défini sur les générateurs de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (voir [8], [13]).

Le problème qu'on veut décrire est comment prouver que Δ est bien défini.
L'approche directe (prouver que Δ préserve les relations entre les générateurs) n'est décisif que dans les cas plus simples (les cas simplement connexes) en raison de la complexité des relations, en particulier des relations définissant la sous-algèbre $\rfloor_q(\mathfrak{g})^+ \subseteq \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ (voir [13]). On décrira donc une autre approche, qui utilise les dérivations d'une algèbre et leurs exponentiels.

Soit A une algèbre ; une dérivation de A est une application linéaire $d : A \to A$ telle que $d(ab) = d(a)b + ad(b)\ \forall a, b \in A$. L'espace des dérivations de A est un sous-espace vectoriel de $End_K(A)$ fermé par crochet (ou équivalemment est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_K(A)$). Pour tout $x \in A$ la fonction $d_x : A \ni a \mapsto xa - ax \in A$ est une dérivation.

Soit d une dérivation localement nilpotente d'une algèbre A sur un corps commutatif K de caractéristique zéro ; alors $exp(d) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n}{n!}$ est un bien défini automorphisme de l'algèbre A. Si d' est une dérivation localement nilpotente de A qui commute avec d, $d+d'$ l'est aussi, et on a $exp(d+d') = exp(d)exp(d')$. Voir [14].

L'idée de la démonstration est de construire une sous-algèbre $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})$ avec un homomorphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^+ \to \mathcal{V}$ et des dérivations localement nilpotentes D_i de $\mathcal{V}$ par déformation de dérivations de la forme d_{x_i} ($x_i \in \mathcal{V}$), telles que $\Delta\big|_{\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})^+} = \prod_{i=1}^{n} exp(D_i) \circ \varphi$.

Références

[1] Abe E. - Hopf algebras, Cambridge Tracts in Mathematics No 74, Cambridge University Press, 1980.

[2] Borel A. - Linear algebraic groups, W. A. benjamin, 1969.

[3] Bourbaki N. - Algèbre, ch. III, Éléments de Mathématiques. Hermann, Paris, 1958.

[4] Bourbaki N. - Groupes et Algèbres de Lie, ch. I, Éléments de Mathématiques. Hermann, Paris, 1972.

[5] Curtis C., Reiner I., Representation theory of finite groups and associative algebras, Wiley, New York, 1962.

[6] Damiani I., Drinfeld realization of affine quantum algebras : the relations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 48 (2012), no. 3, 661-733.

[7] Damiani I., From the Drinfeld realization to the Drinfeld-Jimbo presentation of affine quantum algebras : the injectivity.

[8] Ding J., Frenkel, I..B. - Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra $U_q(\hat{\mathfrak{gl}}(n))$, Commun. Math. Phys. 156 (1993), 277-300.

[9] Drinfeld V.G. - A new realization of Yangians and quantized affine algebras, Soviet Math. Dokl. 36 (1988), 212-216.

[10] Drinfeld V.G. - Hopf algebras and quantum Yang-Baxter equation, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 283 (1985), 1060-1064.

[11] Drinfeld V.G. - Quantum groups, Proc. ICM, Berkeley, vol. 1, American Mathematical Society, 1987, 798-819.

[12] Etingof P.I., Gelaki S., Nikshych D., Ostrik V. - Tensor categories, American Mathematical Society 2015.

[13] Hernandez, D. - Drinfeld coproduct, quantum fusion tensor category and applications, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 95 (2007), no. 3, 567-608.

[14] Humphreys J.E. - Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer Verlag, 1972.

[15] Jimbo M. - A q-difference analog of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63-69.

[16] Kac V.G., Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press, 1990.

[17] Kazhdan D., Lusztig G. - Affine Lie algebras and quantum groups, Duke Math. J. International Res. Notices (1991) no. 2, 21-29.

[18] Kirillov A.A. - Elements of the theory of representations, Springer, 1976.

[19] Lusztig G. - Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, Adv. in Math. 70 (1988), 237-249.

[20] Pierce R.S. - Associative algebras, Springer Verlag new York Unc.,1982.

[21] Rosso M. - An analogue of P.B.W. theorem and universal R-matrix for $U_h(sl(n+1))$, Commun. Math. Phys. 124 (1989), 307-318.

[22] Rosso M. - Représentations irréductibles de dimension finie du q-analogue de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie simple, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, ser. 1, 305 (1987).

[23] Serre J.P. - Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.

[24] Springer T.A. - Linear algebraic groups, Birkhäuser 1981.

[25] Sweedler M.E. - Hopf algebras - Mathematics lecture notes series, W. A. Benjamin, 1969.

Existence et régularité pour certains problèmes elliptiques non linéaires

Un problème modèle : l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour un opérateur de Leray-Lions avec croissance naturelle par rapport au gradient

Adelhafid Mokrane

Laboratoire d'EDP Non Linéaires, ENS de Kouba - Alger - Algéie

Dans cet exposé, basé sur des travaux en collaboration avec François Murat (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris VI), on se concentrera sur les difficultés rencontrées lors du passage à la limite dans des équations non linéaires, ainsi que sur certaines méthodes et certains outils utilisés dans l'étude de ces problèmes.

Le problème considéré ici est complètement non linéaire : il s'agit d'une inéquation avec obstacle pour un opérateur dont la partie principale est un opérateur du second ordre, pseudomonotone, de type Leray-Lions, qui opère de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$, à laquelle s'ajoute une perturbation non linéaire à croissance au plus d'ordre p par rapport au gradient. Le but est de démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia (voir (1) ci dessous) pour au moins une solution de ce problème.

Plus précisement on considère le problème avec obstacle

$$\begin{cases} u \in K(\psi) \cap L^\infty(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,Du)(Dv-Du)\,dx + \lambda \int_\Omega u(v-u)\,dx + \\ \displaystyle -\int_\Omega H(x,u,Du)(v-u)\,dx - \int_\Omega f(v-u)\,dx \geq 0, \\ \forall v \in K(\psi) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases} \tag{1}$$

Ici $K(\psi)$ est défini par

$$K(\psi) = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \ v \geq \psi \ \text{ p.p. dans } \Omega\}, \tag{2}$$

i.e. $K(\psi)$ est l'ensemble des fonctions qui sont supérieures ou égales à un obstacle donné ψ, qui est supposé appartenir à $W^{1,p}(\Omega)$ avec $\psi \leq 0$ sur $\partial\Omega$; la fonction de Carathéodory $a(x,s,\xi)$, est supposée, pour un certain p donné avec $1 < p < +\infty$, être p-coercive, à croissance $p-1$ et fortement monotone en ξ et définit donc un opérateur de Leray-Lions $-\operatorname{div} a(x,v,Dv)$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$; le paramètre λ est strictement positif ; la fonction f

appartient à $L^\infty(\Omega)$ et la fonction de Carathéodory $H(x,s,\xi)$ définit une perturbation non linéaire avec croissance naturelle par rapport au gradient, i.e. vérifie

$$|H(x,s,\xi)| \leq C_0 + C_1|\xi|^p, \tag{3}$$

ce qui implique que pour $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a $H(x,v,Dv) \in L^1(\Omega)$.

Lorsque $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, l'inéquation variationelle (1) est équivalente au problème

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ -\mathrm{div}\, a(x,u,Du) + \lambda u - H(x,u,Du) - f = \mu \;\text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \mu \geq 0 \;\text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \geq \psi \;\text{ p.p. dans } \Omega\}, \\ \langle \mu, (u-\psi)\rangle = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Sous ces hypothèses et sous d'autres hypothèses complémentaires que nous ne préciserons pas ici sur $a(x,s,\xi)$, $H(x,s,\xi)$ et ψ, nous démontrons qu'il existe au moins une solution de (1) pour laquelle l'inégalité de Lewy-Stampacchia est vraie, c'est-à-dire pour laquelle on a

$$\begin{cases} 0 \leq \mu = -\mathrm{div}\, a(x,u,Du) + \lambda u - H(x,u,Du) - f \;\leq \\ \qquad \leq (-\mathrm{div}\, a(x,\psi,D\psi) + \lambda\psi - H(x,\psi,D\psi) - f)^+. \end{cases} \tag{5}$$

Les hypothèses que nous faisons pour obtenir ce résultat sont raisonnables, mais ne sont pas totalement satisfaisantes. En particulier, nous sommes obligés, pour des raisons qui apparemment ne sont que techniques, de supposer que la fonction $a(x,s,\xi)$ est indépendante de s quand $1 < p < 2$, que l'obstacle ψ appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$ lorsque $a(x,s,\xi)$ dépend de s, que la partie positive $B(\psi)^+$ de la la distribution définie par

$$B(\psi) = -\mathrm{div}\, a(x,\psi,D\psi) + \lambda\psi - H(x,\psi,D\psi) - f \tag{6}$$

appartient à $L^\infty(\Omega)$, que f appartient à $L^\infty(\Omega)$ et que λ est strictement positif. Des hypothèses plus naturelles seraient de supposer que $a(x,s,\xi)$ peut dépendre de s (et est localement lipschitzien en s), que l'obstacle ψ appartient seulement à $W^{1,p}(\Omega)$ (avec $\psi^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$), que $B(\psi)^+$ appartient seulement à $W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega)$, que f appartient seulement à $L^{\frac{N}{p}}(\Omega)$ et que λ peut être nul (avec une condition de petitesse sur H dans ce cas). Nous avons été malheureusement incapables de démontrer l'inégalité de Lewy-Stampacchia sous ces hypothèses plus naturelles.

Il faut cependant noter que les hypothèses $\lambda > 0$, $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\psi^+ \in L^\infty(\Omega)$ nous permettent de démontrer que toute solution du problème d'obstacle (1) appartient à $L^\infty(\Omega)$. Ce résultat joue un rôle important dans notre démonstration.

La démonstration de l'inégalité de Lewy-Stampacchia pour le problème (1), qui est l'objet de notre article [7], est en quelque sorte l'aboutissement d'une série de trois articles dans lesquels nous nous sommes intéressés à l'inégalité de Lewy-Stampacchia sous des hypothèses de plus en plus générales.

Notre premier article [4] concernait un opérateur de Leray-Lions plutôt général, mais sans perturbation, c'est-à-dire le cas où l'on a $H = 0$ dans l'inéquation (1) ci-dessus ; dans cet article, la section 2 est consacrée au cas où l'opérateur est l'opérateur de Laplace : dans ce cas notre démonstration est beaucoup moins technique et est facile à suivre.

Dans [5], nous avons traité le cas du problème bilatéral, c'est-à-dire le cas où $K(\psi)$ est remplacé par

$$K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \quad \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p.p. dans } \Omega\}, \tag{7}$$

toujours dans le cas où $H = 0$. Dans cet article, nous avons démontré que toute solution (et pas seulement au moins une solution) de (1) satisfait l'inégalité de Lewy-Stampacchia.

Enfin, dans [6], nous avons considéré le cas du problème (1) avec une perturbation non linéaire H, mais seulement dans le cas où l'opérateur Leray-Lions est un opérateur linéaire donné par $-\mathrm{div}\, A(x)Du$. Dans ce cas on a $p = 2$ et $a(x, s, \xi) = A(x)\xi$ est indépendant de s.

Les résultats de l'article [7] présentés ici constituent donc une généralisation naturelle de ceux de [6].

La méthode que nous utilisons dans [7] est basée (comme dans nos autres travaux) sur la pénalisation naturelle du problème d'obstacle, où la contrainte $u \geq \psi$ dans le problème d'obstacle (1) est approchée par le terme de pénalisation $-\dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^-$.

Une première partie de notre travail consiste à démontrer l'existence d'une solution du problème d'obstacle (1) par cette méthode de pénalisation.

Pour cela, nous démontrons d'abord (en utilisant les hypothèses $\lambda > 0$, $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\psi^+ \in L^\infty(\Omega)$), que les solutions u_ε du problème pénalisé

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad (u_\varepsilon - \psi)^- \in L^2(\Omega), \\ \\ -\mathrm{div}\, a(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) + \lambda u_\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - \psi)^- = \\ \\ = H(x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon) + f \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \tag{8}$$

sont bornées dans $L^\infty(\Omega)$.

Ensuite, en utilisant dans (8) la fonction test non linéaire $u_\varepsilon \exp(M u_\varepsilon^2)$ pour un M assez grand, nous démontrons que ces solutions u_ε sont bornées dans $W_0^{1,p}(\Omega)$; cela entraîne qu'il existe une sous-suite de la suite u_ε qui converge faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers un certain u.

Nous démontrons enfin que cette sous-suite de u_ε converge fortement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$; cette partie de la démonstration est basée sur la méthode utilisée par L. Boccardo, J.-P. Puel et F. Murat dans [1] et [2].

Des trois étapes précédentes on déduit facilement que u est une solution du problème d'obstacle (1).

Il reste à montrer que ce u satisfait l'inégalité de Lewy-Stampacchia. C'est l'objet de la deuxième partie de notre travail.

Pour cela, nous démontrons une nouvelle estimation sur le terme de pénalisation ; lorsque la fonction $a(x, s, \xi)$ est indépendante de s, cette estimation est juste le fait que le terme de pénalisation est borné dans $L^\infty(\Omega)$; mais ce n'est plus le cas lorsque $a(x, s, \xi)$ dépend de s, ce qui entraine des difficultés qui nous obligent à faire des hypthèses restrictives comme indiqué plus haut.

Grâce à cette estimation, nous démontrons dans une première étape l'inégalité de Lewy-Stampacchia sous une hypothèse supplémentaire de régularité, i.e. en supposant que $B(\psi)^+$ appartient à $W_0^{1,p} \cap L^\infty(\Omega)$ et pas seulement à $L^\infty(\Omega)$. Dans une deuxième étape, nous démontrons par un processus d'approximation et un passage à la limite l'inégalité de Lewy-Stampacchia dans le cas général (i.e. sans cette hypothèse de régularité).

L'inégalité de Lewy-Stampacchia a une longue histoire qui a commencé avec le célèbre article [3] de H. Lewy et G. Stampacchia. Cet article a été suivi de très nombreux travaux que nous ne citerons pas ici ; on renvoie pour cela aux articles cités dans [4], [5], [6] et [7].

Rappelons que l'inégalité de Lewy-Stampacchia est un outil puissant pour l'étude du problème d'obstacle (1), en particulier en ce qui concerne les résultats de régularité. En effet, on peut lire l'inéquation variationnelle (1) comme une équation

$$-\operatorname{div} a(x, u, Du) + \lambda u = H(x, u, Du) + f + \mu \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{9}$$

dans laquelle le terme μ est en fait une inconnue. Mais ce terme est contrôlé par les données du problème grâce à l'inégalité de Lewy-Stampacchia (1).

Références

[1] L. Boccardo, F. Murat & J.-P. Puel, *Existence de solutions faibles pour des équations elliptiques quasi-linéaires à croissance quadratique*, in *Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, Vol. IV*, ed. by H. Brezis & J.-L. Lions, Res. Notes in Math., 84, Pitman, London, 1983, pp. 19-73.

[2] L. Boccardo, F. Murat & J.-P. Puel, *Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems*, Ann. Mat. pura appl., 152, 1988, pp. 183-196.

[3] H. Lewy & G. Stampacchia, *On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem*, J. Analyse Math., 23, 1970, pp. 227-236.

[4] A. Mokrane & F. Murat, *A proof of Lewy-Stampacchia's inequality by a penalization method*, Pot. Anal., 9, 1998, pp. 105-142.

[5] A. Mokrane & F. Murat, *The Lewy-Stampacchia inequality for bilateral problems*, Ric. Mat., 53, 2004, pp. 139-182.

[6] A. Mokrane & F. Murat, *The Lewy-Stampacchia inequality for the obstacle problem with quadratic growth in the gradient*, Ann. Mat. pura appl., 184, 2005, pp. 347-360.

[7] A. Mokrane & F. Murat, *Lewy-Stampacchia's inequality for a Leray-Lions operator with natural growth in the gradient*, Boll. Un. Mat. Ital., 7, 2014, pp. 55-85.